

Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2020/21

16. November 2020 – Grundlagen III: Rechnen im Binärsystem

Universität zu Köln. **Historisch-Kulturwissenschaftliche Informationsverarbeitung**

Dr. Jan G. Wieners // jan.wieners@uni-koeln.de

Inhalte der heutigen Sitzung

Rechnen im Binärsystem

- Addition von Binärzahlen
- Multiplikation von Binärzahlen
- (Subtraktion von Binärzahlen)

Vorzeichenbehaftete Zahlen

- Zweierkomplementdarstellung

Kurzwiederholung



Vier Zahlensysteme gegenübergestellt

| | | | | | | | | | |
|-------------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|------|
| Dezimal | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Binär | 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 |
| Oktal | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 10 |
| Hexadezimal | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

| | | | | | | | | |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Dezimal | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| Binär | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 | 10000 |
| Oktal | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 20 |
| Hexadezimal | 9 | A | B | C | D | E | F | 10 |

Umwandlung Binärsystem → Dezimalsystem

Zur Umwandlung: Multiplikation der entsprechenden Ziffern mit den Zweierpotenzen:

$$10111 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16$$

$$= 23$$

Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

Übungsaufgaben

- | | | |
|--------|----|-------------------------------|
| 1011 | => | welche Zahl im Dezimalsystem? |
| 1 1110 | => | welche Zahl im Dezimalsystem? |
| 0 0011 | => | welche Zahl im Dezimalsystem? |

Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

Übungsaufgaben

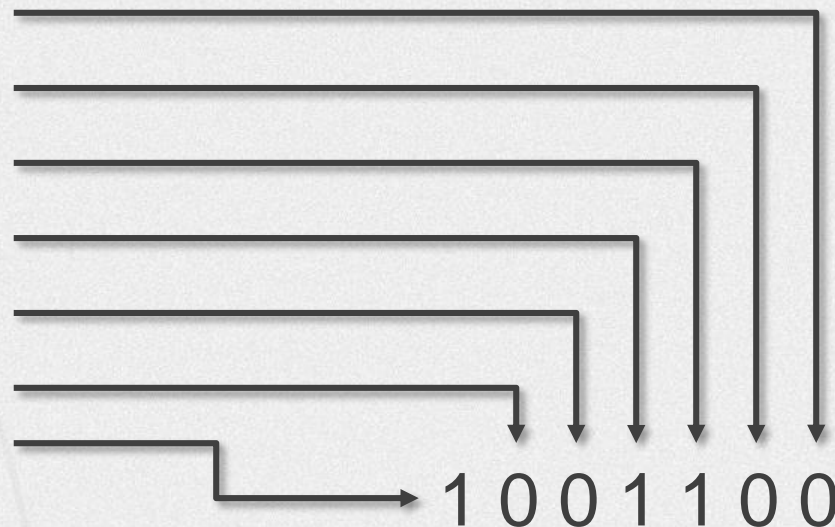
| | | |
|--------|----|----|
| 1011 | => | 11 |
| 1 1110 | => | 30 |
| 0 0011 | => | 3 |

Umwandlung Dezimal → Binärsystem

Eine Dezimalzahl lässt sich über die Division durch 2 und Aufschreiben der Reste in eine Binärzahl umwandeln (das ist eine Möglichkeit, häufig lässt sich das auch im Kopf lösen).

Beispiel: Die Zahl 76 soll ins Binärsystem umgewandelt werden

- $76 / 2 = 38$; Rest 0
- $38 / 2 = 19$; Rest 0
- $19 / 2 = 9$; Rest 1
- $9 / 2 = 4$; Rest 1
- $4 / 2 = 2$; Rest 0
- $2 / 2 = 1$; Rest 0
- $1 / 2 = 0$; Rest 1



Übung: Dezimalzahl \rightarrow Binärzahl

Übungsaufgaben

9 = Welche Binärzahl?

38 = Welche Binärzahl?

57 = Welche Binärzahl?

Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

Übungsaufgaben

$$9 = 1001$$

$$38 = 10\ 0110$$

$$57 = 11\ 1001$$

Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

$$290 = ?$$

$$290 / 2 = 145, \text{ Rest: } 0$$

$$145 / 2 = 72, \text{ Rest: } 1$$

$$72 / 2 = 36, \text{ Rest: } 0$$

$$36 / 2 = 18, \text{ Rest: } 0$$

$$18 / 2 = 9, \text{ Rest: } 0$$

$$9 / 2 = 4, \text{ Rest: } 1$$

$$4 / 2 = 2, \text{ Rest: } 0$$

$$2 / 2 = 1, \text{ Rest: } 0$$

$$1 / 2 = 0, \text{ Rest: } 1$$

→ 1 0010 0010

Rechnen im Binärsystem



Rechnen im Binärsystem: Addition

Additionsregeln

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$ mit 1 Übertrag $\rightarrow 1\ 0$

- $1 + 1 + \text{Übertrag} = 1 + \text{Übertrag}$
- $1 + 1 + \text{Übertrag} + \text{Übertrag} = 1+1+1+1$ (4x1)

Rechnen im Binärsystem: Addition

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0011 \\ + 0001 \\ + 0101 \\ \hline \\ 11 \\ 111 \\ \hline 1100 \end{array}$$

Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline \end{array}$$

Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline 1\ 0000\ 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline 110\ 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline 1\ 0011\ 0011 \end{array}$$

Multiplikation im Binärsystem



Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts):
Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0:
Nullen notieren.

Beispiel:

$$47 * 17 = 101111 * 10001$$

101111* 10001

101111

000000

000000

000000

101111

1100011111

Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts): Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0: Nullen notieren.

8 Bit → 1 Byte

4 Bit → 1 Nibble

Beispiel II:

$$5 * 7 = 0101 * 0111$$

$$0101 * 0111 = ?$$

=====

0000

0101

0101

0101

11

=====

10 0011

Übungsaufgaben Multiplikation

Berechnen Sie im Binärsystem:

- $17 * 3$
- $23 * 15$
- $4 * 7$

Übungsaufgaben Multiplikation

$$17 * 3 = ?$$

- $10001 * 11$

10001

10001

$$110011 = 51$$

Übungsaufgaben Multiplikation

$$23 * 15 = ?$$

▪ $10111 * 1111$

10111

10111

10111

10111

101011001 = 345

Übungsaufgaben Multiplikation

$$4 * 7 = ?$$

- $100 * 111$

100

100

100

$$**11100=28**$$

Subtraktion im Binärsystem

→ Subtraktion: Addition einer negativen Zahl

A large, bold, black stylized letter 'Z' with a white diagonal stripe running from the top-left to the bottom-right.

-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Binärdarstellung ganzer Zahlen

Wie \mathbb{Z} darstellen?

Möglichkeit I:

MSB (Most Significant Bit,
d.h.: erstes Bit, ganz links)

zur Kennzeichnung
verwenden

→ MSB == 0, dann positive Zahl

→ MSB == 1, dann negative Zahl

...Probleme?

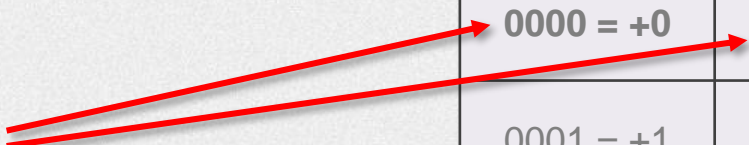
| | |
|-----------|-----------|
| 0000 = +0 | 1000 = -0 |
| 0001 = +1 | 1001 = -1 |
| 0010 = +2 | 1010 = -2 |
| 0011 = +3 | 1011 = -3 |
| 0100 = +4 | 1100 = -4 |
| 0101 = +5 | 1101 = -5 |
| 0110 = +6 | 1110 = -6 |
| 0111 = +7 | 1111 = -7 |

Binärdarstellung ganzer Zahlen

Probleme!

- 0 zweimal codiert
- Rechnen verkompliziert

| | |
|------------------|------------------|
| 0000 = +0 | 1000 = -0 |
| 0001 = +1 | 1001 = -1 |
| 0010 = +2 | 1010 = -2 |
| 0011 = +3 | 1011 = -3 |
| 0100 = +4 | 1100 = -4 |
| 0101 = +5 | 1101 = -5 |
| 0110 = +6 | 1110 = -6 |
| 0111 = +7 | 1111 = -7 |

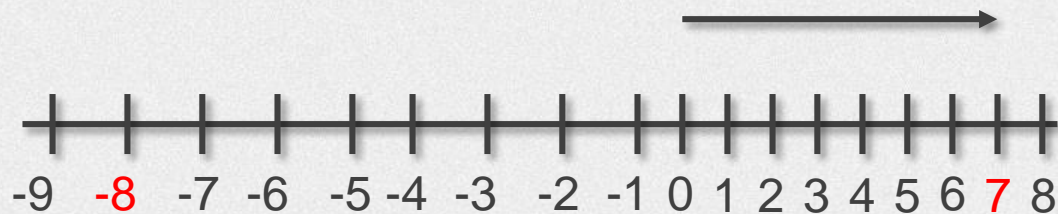




Zweierkomplementdarstellung



Zweierkomplementdarstellung



$$0000 = 0$$

$$0001 = 1$$

$$0010 = 2$$

$$0011 = 3$$

$$0100 = 4$$

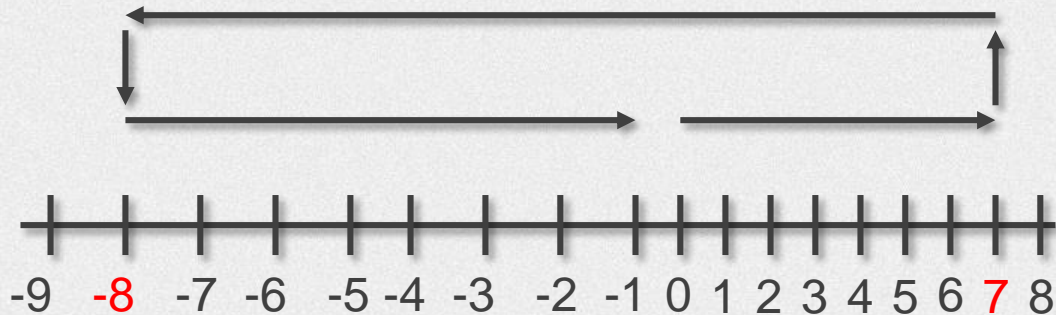
$$0101 = 5$$

$$0110 = 6$$

$$0111 = 7$$

Darstellbarer Zahlenbereich: -2^{n-1} bis $2^{n-1}-1$

Zweierkomplementdarstellung



| | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|
| 1000 = -8 | 1100 = -4 | 0000 = 0 | 0100 = 4 |
| 1001 = -7 | 1101 = -3 | 0001 = 1 | 0101 = 5 |
| 1010 = -6 | 1110 = -2 | 0010 = 2 | 0110 = 6 |
| 1011 = -5 | 1111 = -1 | 0011 = 3 | 0111 = 7 |

Darstellbarer Zahlenbereich: -2^{n-1} bis $2^{n-1}-1$

Standardformate für ganze Zahlen

| Größe | Java | C++ | Wertebereich |
|--------|-------|-----------|--|
| 8 Bit | byte | char | $-2^7 \dots 2^7-1$ oder $-128 \dots 127$ |
| 16 Bit | short | int/short | $-2^{15} \dots 2^{15}-1$ oder $-32.768 \dots 32.767$ |
| 32 Bit | int | int/long | $-2^{31} \dots 2^{31}-1$ oder $-2.147.483.648 \dots 2.147.483.647$ |

Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1
 $1001 + 0001 = 1010$

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem (unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1
1001 + 0001 = 1010

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem (unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

| | | | |
|-----------|-----------|----------|----------|
| 1000 = -8 | 1100 = -4 | 0000 = 0 | 0100 = 4 |
| 1001 = -7 | 1101 = -3 | 0001 = 1 | 0101 = 5 |
| 1010 = -6 | 1110 = -2 | 0010 = 2 | 0110 = 6 |
| 1011 = -5 | 1111 = -1 | 0011 = 3 | 0111 = 7 |

Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit

1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$15 = 1111$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
1111 = 0000 1111
- Einerkomplement bilden:
1111 0000
- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1111\ 0000 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1111\ 0001 \end{array}$$

$$\rightarrow -15 = 1111\ 0001$$

Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit

1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$45 = 10\ 1101$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
 $10\ 1101 = 0010\ 1101$
- Einerkomplement bilden:
 $1101\ 0010$
- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1101\ 0010 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1101\ 0011 \end{array}$$

$$\rightarrow -45 = 1101\ 0011$$

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$17 = 1\ 0001$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
 $1\ 0001 = 0001\ 0001$
- Einerkomplement bilden:
 $1110\ 1110$
- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1110\ 1110 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1110\ 1111 \end{array}$$

$$\rightarrow -17 = 1110\ 1111$$

