Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2020/21

07. Dezember 2020 – Schaltalgebra: Grundgesetze und Rechenregeln

Universität zu Köln. Historisch-Kulturwissenschaftliche Informationsverarbeitung

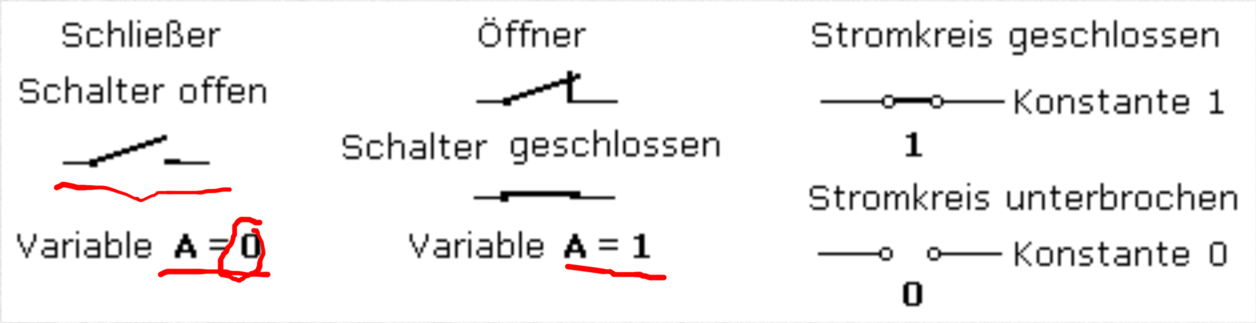
Dr. Jan G. Wieners // jan.wieners@uni-koeln.de

Themenüberblick „Schaltalgebra: Grundgesetze und Rechenregeln“

- Basics
  - Variable vs. Konstante
  - Theoreme
  - Kommutativ- und Assoziativgesetz
  - Distributivgesetz
  - De Morgansche Gesetze
  - Bindungsregel
- Gleichungsvereinfachung

Variable vs. Konstante

- Die Schaltalgebra kennt nur zwei **Konstante**: **0** oder **1**
- **Variable** der Schaltalgebra sind Größen, die die Werte oder Zustände **0** oder **1** annehmen können (z.B. Schalter geöffnet vs. Schalter geschlossen).



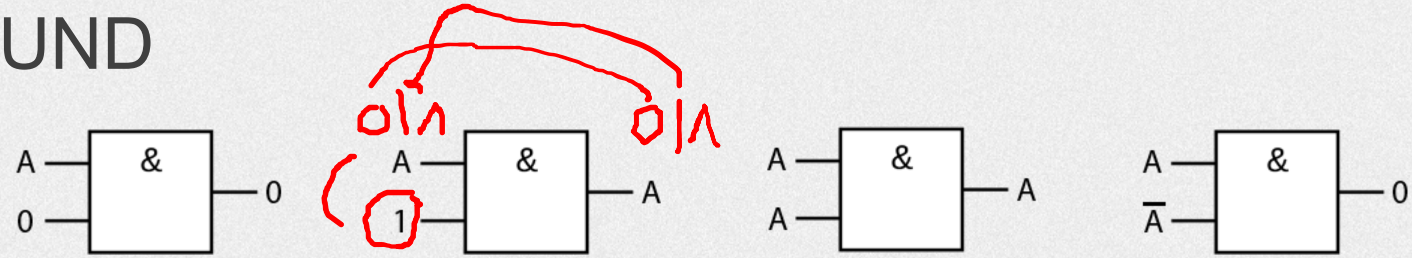
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Postulate (et es wie et es™)

UND	ODER	NICHT
$0 \wedge 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$	$\neg 0 = 1$
$0 \wedge 1 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	$\neg 1 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$	$1 \vee 0 = 1$	
$1 \wedge 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	

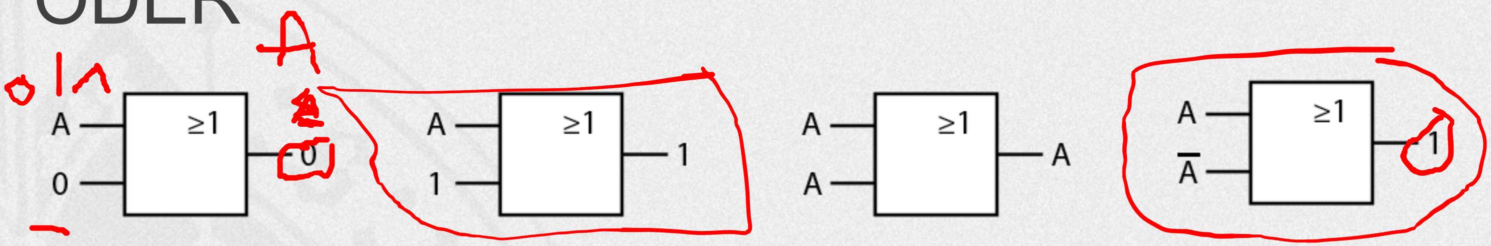
Theoreme

UND



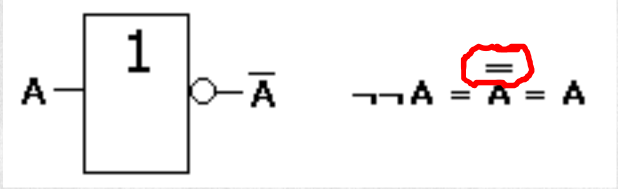
$A \wedge 0 = 0$ $A \wedge 1 = A$ $A \wedge A = A$

ODER



$A \vee 0 = 0$

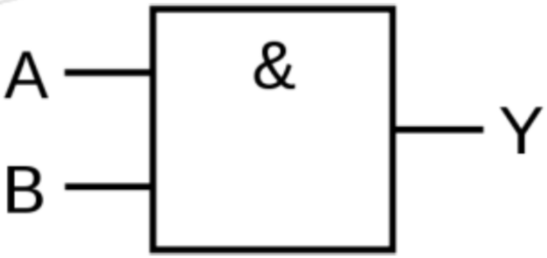
NICHT



Quelle NICHT: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Konjunktion (UND-Gatter)

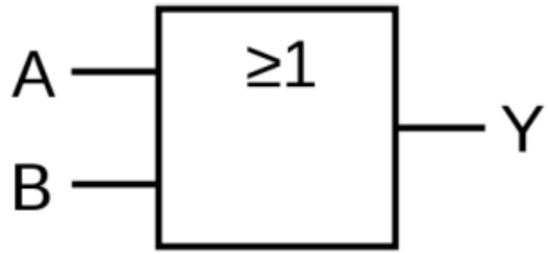
$Y = A \wedge B$



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunktion (ODER-Gatter)

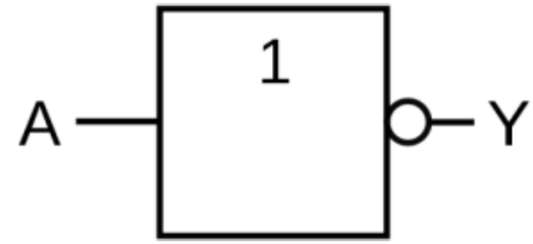
$Y = A \vee B$



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NICHT

$Y = \neg A$



A	Y
0	1
1	0

Übungsaufgabe 1

Zum gemütlichen Start: Bestimmen Sie bitte die vollständigen Wahrheitstabellen für die folgenden beiden Funktionsgleichungen:

- $Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$
- $Y = (A \lor B) \land \ (A \land C) \land B$

„Konditional“ →

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$

A	B	A ∨ B	B ∧ A	Y
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \vee B) \rightarrow (B \wedge A)$

A	B	A ∨ B	B ∧ A	Y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Übungsaufgabe 1

$$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$$

A	B	C	A ∨ B	A ∧ C	(A ∨ B) ∧ (A ∧ C) = X	Y= X ∧ B
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Übungsaufgabe 1

Y = (A ∨ B) ∧ (A ∧ C) ∧ B

A	B	C	A ∨ B	A ∧ C	(A ∨ B) ∧ (A ∧ C) = X	Y= X ∧ B
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1


IT'S ALWAYS SUNNY IN PHILADELPHIA
WEDS 10
FX

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Bei UND sowie ODER lassen sich Variablen beliebig vertauschen, das Ergebnis bleibt dasselbe:

UND	$X = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B = B \wedge C \wedge A$
ODER	$X = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B = B \vee C \vee A$

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Assoziativgesetz (auch: Verbindungsgesetz)

Die Reihenfolge der Zuordnung der Variablen bei der UND- und ODER-Verknüpfung ist beliebig und hat keinen Einfluss auf das Ergebnis:

$$Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

Bindungsregel

$Z = A \vee B \wedge C$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

$Z = (A \lor B) \land C$

$Z = A \lor (B \land C)$

Bindungsregel

$Z = A \vee B \wedge C$

$Z = (A \vee B) \wedge C$

$Z = A \vee (B \wedge C)$

$X = A \vee B \wedge C$

nach der Vorrangregel gilt

$\boxed{X = A \vee (B \wedge C)}$

festgelegte Abfolge der Verknüpfungen

$\boxed{Z = (A \vee B) \wedge C}$

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$A \vee (B \wedge C) \neq (A \vee B) \wedge C$

$\wedge$

→ Eine UND-Verknüpfung bindet stets stärker als eine ODER-Verknüpfung.

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Konjunktives Distributivgesetz

$$Z = A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

Disjunktives Distributivgesetz

$$Z = A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$


#WORLDOFDANCE
NBC

Termvereinfachung I

Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

Termvereinfachung I

Die Gleichung

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M)$

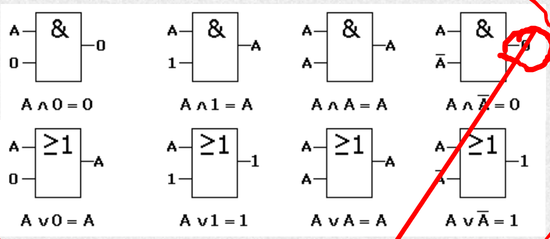
soll vereinfacht werden.

Disjunktives Distributivgesetz:

$Z = A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M) = K \lor (\overline{M} \land M)$

Termvereinfachung I



Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

Disjunktives Distributivgesetz:

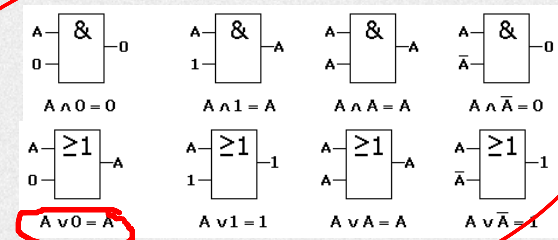
$Z = A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M) = K \vee (\overline{M} \wedge M)$

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Termvereinfachung I

Die Gleichung
$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$
soll vereinfacht werden.

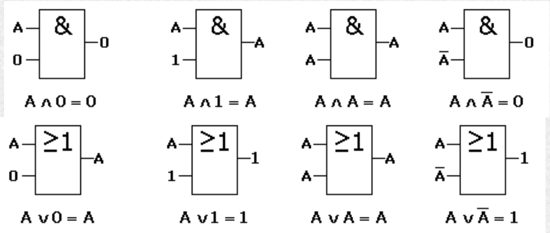


Disjunktives Distributivgesetz:
$Z = A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M) = K \vee (\overline{M} \wedge M)$
$\underline{M} \wedge M = 0$
$Z = K \vee 0$
Z = K 🔥

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Termvereinfachung I



Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

$Z = K$

Beweis:

K	M	$\overline{M}$	$K \vee \overline{M}$	$K \vee M$	Z
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

De Morgan‘sche Gesetze

De Morgan'sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: $Z = \neg(A \land B) = \mathbf{\neg A \lor \neg B}$

A	B	A ∧ B	¬(A ∧ B)	¬A	¬B	¬A ∨ ¬B
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

De Morgan‘sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: Z = ¬(A ∧ B) = **¬A ∨ ¬B**

A	B	A ∧ B	¬(A ∧ B)	¬A	¬B	¬A ∨ ¬B
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

De Morgan‘sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: Z = ¬(A ∧ B) = **¬A ∨ ¬B**

A	B	A ∧ B	¬(A ∧ B)	¬A	¬B	¬A ∨ ¬B
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

De Morgan‘sche Gesetze

Zweites Gesetz: $Z = \neg(A \vee B) = \mathbf{\neg A \wedge \neg B}$

A	B	A ∨ B	¬(A ∨ B)	¬A	¬B	¬A ∧ ¬B
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

De Morgan‘sche Gesetze

Zweites Gesetz: $Z = \neg(A \lor B) = \mathbf{\neg A \land \neg B}$

A	B	A ∨ B	¬(A ∨ B)	¬A	¬B	¬A ∧ ¬B
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER, da nur NOR-Gatter zur Verfügung stehen:

$$X = A \wedge B = \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER

$$X = A \wedge B = \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$$

$$X = A \vee B = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$$

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER

$$X = A \land B = \overline{\overline{A \land B}} = \overline{\overline{A} \lor \overline{B}}$$

Beispiel 2: Umformung ODER zu UND

$$Y = A \lor B = \overline{\overline{A \lor B}} = \overline{\overline{A} \land \overline{B}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$$Z \quad = A \land B \land C$$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$$Z = A \wedge B \wedge C$$

$$= \overline{\overline{A \wedge B \wedge C}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$$Z = A \wedge B \wedge C$$

$$= \overline{\overline{A \wedge B \wedge C}}$$

$$= \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$$Z \quad = A \land \overline{B} \land C$$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$$Z = A \land \bar{B} \land C$$

$$= A \land \bar{B} \land C$$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$$Z = A \wedge \bar{B} \wedge C$$

$$= \overline{\overline{A \wedge \bar{B} \wedge C}}$$

$$= \overline{\bar{A} \vee \bar{\bar{B}} \vee \bar{C}}$$

Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term $A \vee B$, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter verwenden.

Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term
$A \lor B$, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter verwenden.

$$Z = A \lor B$$

$$= \overline{\overline{A \lor B}}$$

$$= \overline{\overline{A} \land \overline{B}}$$

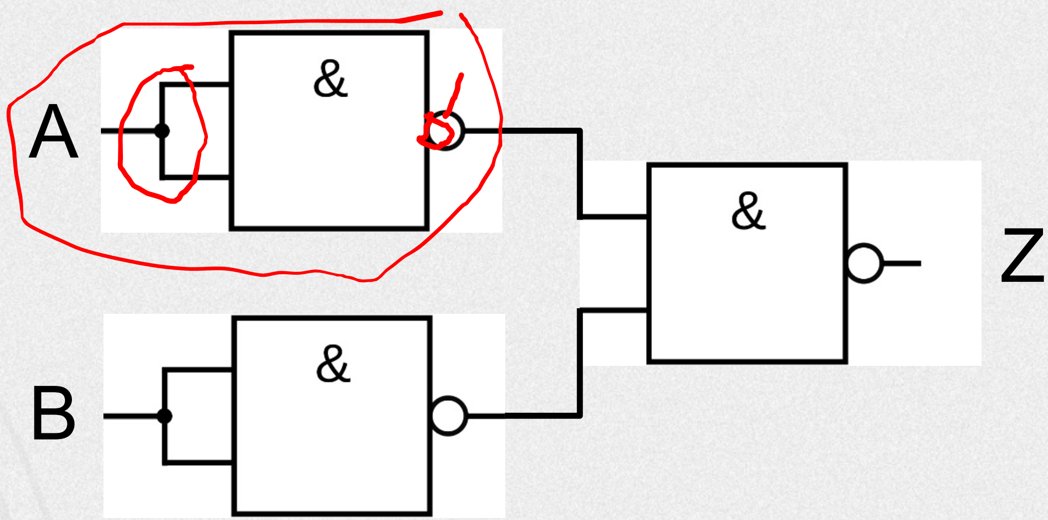
Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term
A ∨ B, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter verwenden.

$$Z = A \vee B$$

$$= \overline{\overline{A \vee B}}$$

$$= \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$$



Grundgatter

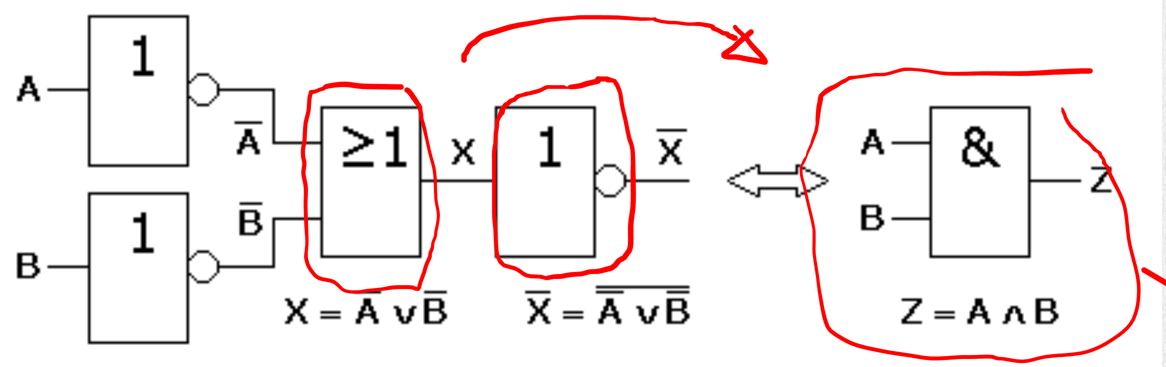
Grundglieder: UND, ODER, NICHT

→ Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

Grundgatter: OR + NOT

Grundglieder: UND, ODER, NICHT
→ Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

→ Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit **ODER**-Gliedern und mit **NICHT**-Gliedern aufgebaut werden:



$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ 1. De Morgansche Gesetz

doppelte Negation ergibt

$\overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ ⇒ $\boxed{A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}}$

UND			ODER			
A	B	Z	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X	$\overline{X}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

$Z = \overline{X}$

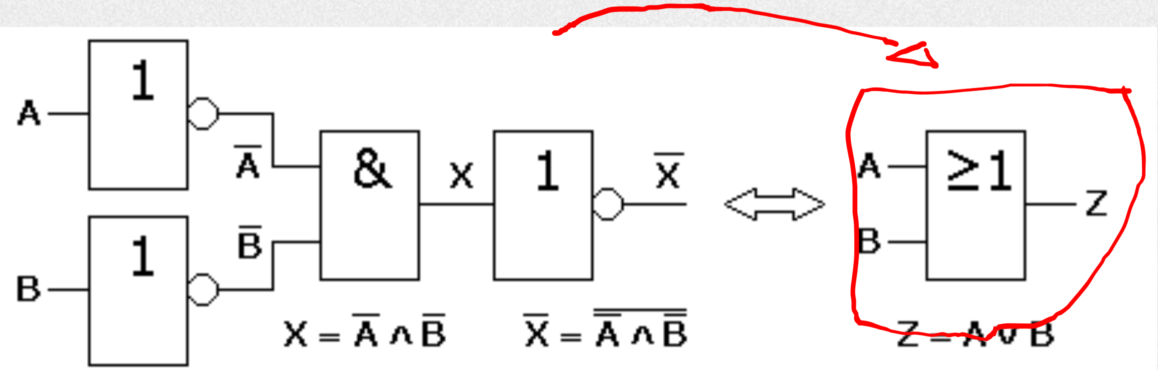
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Grundgatter: AND + NOT

Grundglieder: UND, ODER, NICHT

→ Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

→ Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit **UND**-Gliedern und mit **NICHT**-Gliedern aufgebaut werden.



$X = \overline{A} \wedge \overline{B}$ $\quad \overline{X} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ $\quad Z = A \vee B$

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ 2. De Morgansche Gesetz

doppelte Negation ergibt

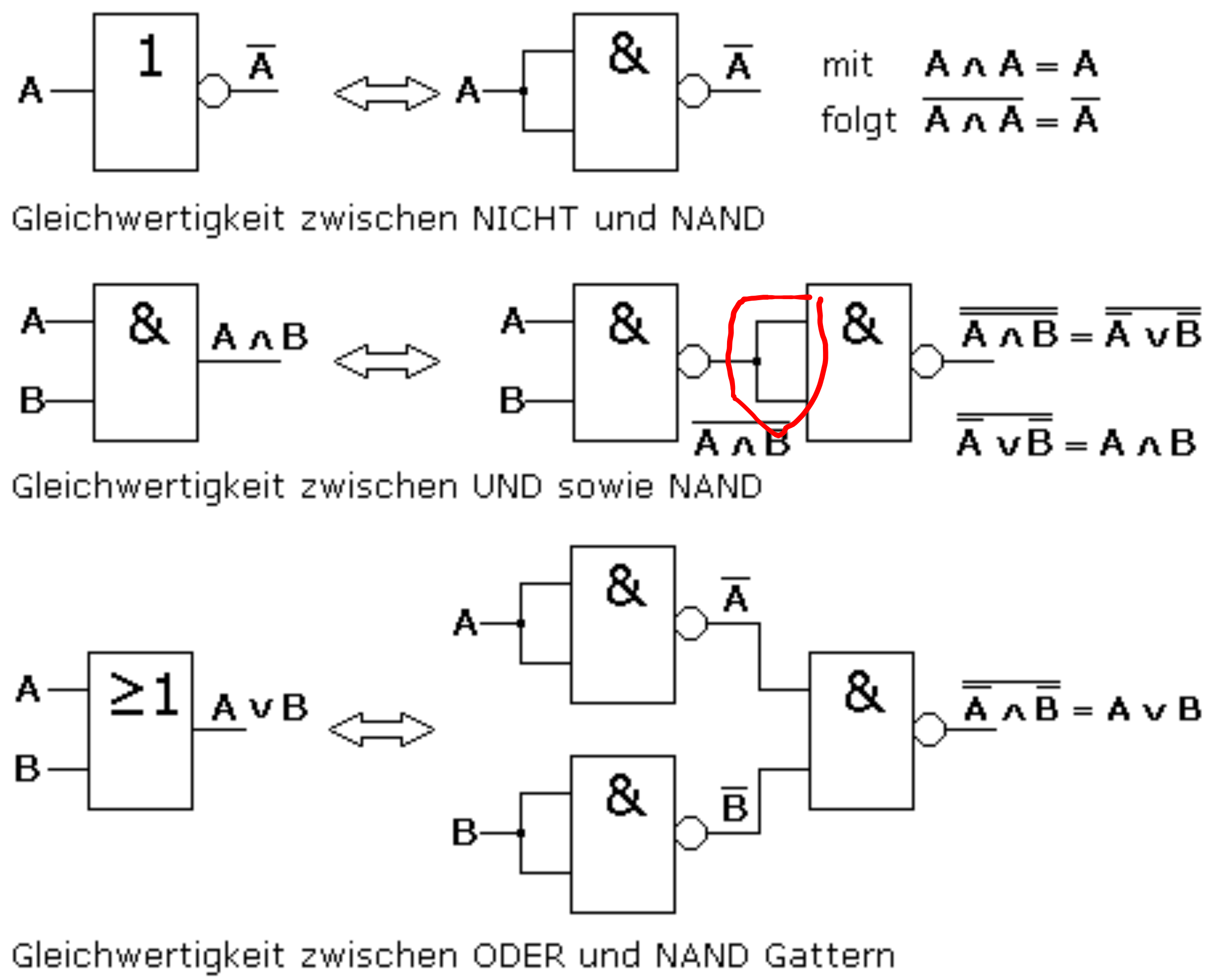
$\overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \Rightarrow \boxed{A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}$

ODER			UND			
A	B	Z	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X	$\overline{X}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

$Z = \overline{X}$

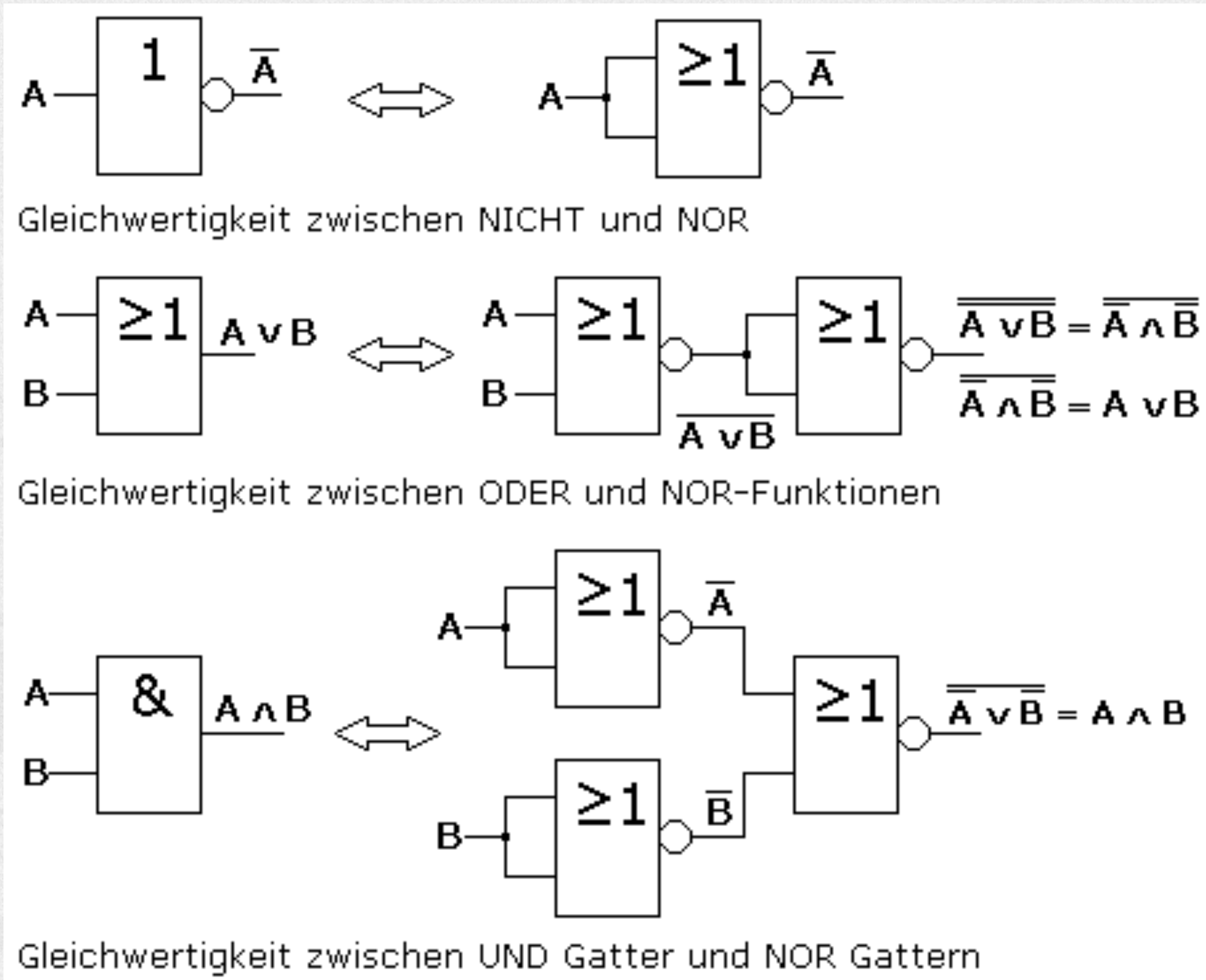
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

NAND FTW!



Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

NOR FTW!



Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Bildnachweis:
macgyver multitool joke, paper spin, Dave O, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Macgyver_multitool_joke.jpg

Übungsaufgaben

Vereinfachen Sie die folgenden Gleichungen:

- $Z = A \vee B \vee \overline{B}$
- $X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge N \wedge \overline{M})$
- $Z = B \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee \overline{B}$
- $Z = X \wedge (\overline{X} \vee S)$

Erstellen Sie entsprechende Wahrheitstabellen, um ihr Ergebnis zu kontrollieren.

Erinnerung:

- Eine Variable ODER 1 ergibt 1
- Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable

Übungsaufgaben

$$Z = A \vee \underbrace{B \vee \overline{B}}_{\to 1}$$

$$B \vee \overline{B} = 1$$

$$\cancel{Z = A \vee A \vee}$$

$$Z = A \vee 1$$

$$Z = 1$$

Erinnerung:

- Eine Variable ODER 1 ergibt 1
- Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable

Übungsaufgaben

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (M \wedge N \wedge \overline{M})$$

$$(\overline{N} \wedge M) \vee (M \wedge \overline{M} \wedge N)$$

$$M \wedge \overline{M} = 0$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee (0 \wedge N) \rightarrow 0$$

$$X = (M \wedge \overline{N}) \vee 0 \rightarrow X = M \wedge \overline{N}$$

Erinnerung:

- Eine Variable ODER 1 ergibt 1
- Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable

Übungsaufgaben

$$Z = B \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) \vee \overline{B}$$

$\rightarrow B \vee \overline{B} = 1$

$$Z = \underline{B \vee \overline{B}} \vee (\overline{A} \wedge B \wedge C) = 1 \vee (\underbrace{\overline{A} \wedge B \wedge C}_{\text{VAR.}})$$

$$= \underline{1}$$

Erinnerung:

- Eine Variable ODER 1 ergibt 1
- Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable

Übungsaufgaben

$$Z = X \land (\overline{X} \lor S)$$

$$= \cancel{X \land S}$$

$$= (X \land \bar{X}) \lor (X \land S)$$

$$= 0 \lor (X \land S)$$

$$= X \land S$$

Erinnerung:

- Eine Variable ODER 1 ergibt 1
- Eine Variable ODER 0 ergibt die Variable