

# Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2021/22

25. Oktober 2021 – Grundlagen III: Rechnen im Binärsystem

Universität zu Köln. **Historisch-Kulturwissenschaftliche Informationsverarbeitung**

Dr. Jan Wieners // [jan.wieners@uni-koeln.de](mailto:jan.wieners@uni-koeln.de)

# Inhalte der heutigen Sitzung

## Rechnen im Binärsystem

- Addition von Binärzahlen
- Multiplikation von Binärzahlen
- (Subtraktion von Binärzahlen)

## Vorzeichenbehaftete Zahlen

- Zweierkomplementdarstellung

# Kurzwiederholung



# Vier Zahlensysteme gegenübergestellt

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Binär	0	1	10	11	100	101	110	111	1000
Oktal	0	1	2	3	4	5	6	7	10
Hexadezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Dezimal	9	10	11	12	13	14	15	16
Binär	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
Oktal	11	12	13	14	15	16	17	20
Hexadezimal	9	A	B	C	D	E	F	10

# Umwandlung Binärsystem → Dezimalsystem

Zur Umwandlung: Multiplikation der entsprechenden Ziffern mit den Zweierpotenzen:

$$10111 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16$$

$$= 23$$

# Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

## Übungsaufgaben

- 1011                   =>     welche Zahl im Dezimalsystem?
- 1 1110               =>     welche Zahl im Dezimalsystem?
- 0 0011               =>     welche Zahl im Dezimalsystem?

# Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

## Übungsaufgaben

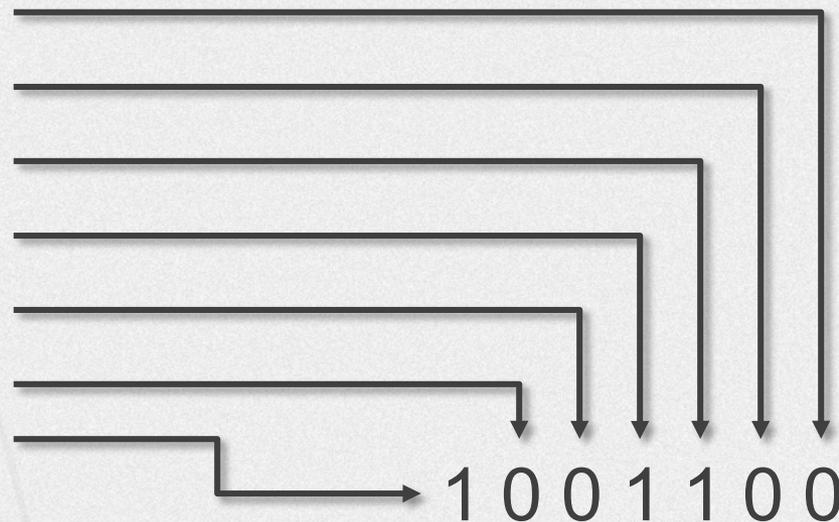
1011	=>	11
1 1110	=>	30
0 0011	=>	3

# Umwandlung Dezimal → Binärsystem

Eine Dezimalzahl lässt sich über die Division durch 2 und Aufschreiben der Reste in eine Binärzahl umwandeln (das ist eine Möglichkeit, häufig lässt sich das auch im Kopf lösen).

Beispiel: Die Zahl 76 soll ins Binärsystem umgewandelt werden

- $76 / 2 = 38$ ; Rest 0
- $38 / 2 = 19$ ; Rest 0
- $19 / 2 = 9$ ; Rest 1
- $9 / 2 = 4$ ; Rest 1
- $4 / 2 = 2$ ; Rest 0
- $2 / 2 = 1$ ; Rest 0
- $1 / 2 = 0$ ; Rest 1



# Übung: Dezimalzahl $\rightarrow$ Binärzahl

## Übungsaufgaben

9 = Welche Binärzahl?

38 = Welche Binärzahl?

57 = Welche Binärzahl?

# Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

## Übungsaufgaben

$$9 = 1001$$

$$38 = 100110$$

$$57 = 111001$$

# Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

290 = ?

$290 / 2 = 145$ , Rest: 0

$145 / 2 = 72$ , Rest: 1

$72 / 2 = 36$ , Rest: 0

$36 / 2 = 18$ , Rest: 0

$18 / 2 = 9$ , Rest: 0

$9 / 2 = 4$ , Rest: 1

$4 / 2 = 2$ , Rest: 0

$2 / 2 = 1$ , Rest: 0

$1 / 2 = 0$ , Rest: 1

→ 1 0010 0010

# Rechnen im Binärsystem



# Rechnen im Binärsystem: Addition

## Additionsregeln

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$  mit 1 Übertrag  $\rightarrow 1\ 0$
  
- $1 + 1 + \text{Übertrag} = 1 + \text{Übertrag}$
- $1 + 1 + \text{Übertrag} + \text{Übertrag} = 1+1+1+1\ (4 \times 1)$

# Rechnen im Binärsystem: Addition

$$\begin{array}{r} 0011 \\ + 0011 \\ + 0001 \\ + 0101 \\ \hline \\ 11 \\ 111 \\ \hline \\ 1100 \end{array}$$

# Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline \end{array}$$

# Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline 1\ 0000\ 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline 110\ 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline 1\ 0011\ 0011 \end{array}$$

# Multiplikation im Binärsystem



# Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts):  
Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0:  
Nullen notieren.

Beispiel:

$$47 * 17 = 101111 * 10001$$

101111\* 10001

101111

000000

000000

000000

101111

-----  
1100011111

# Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts): Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0: Nullen notieren.

8 Bit → 1 Byte

4 Bit → 1 Nibble

Beispiel II:

$$5 * 7 = 0101 * 0111$$

$$0101 * 0111 = ?$$

=====

0000

0101

0101

0101

11

=====

10 0011

# Übungsaufgaben Multiplikation

Berechnen Sie im Binärsystem:

- $17 * 3$
- $23 * 15$
- $4 * 7$

# Übungsaufgaben Multiplikation

$$17 * 3 = ?$$

- $10001 * 11$

10001

10001

-----

$$110011 = 51$$

# Übungsaufgaben Multiplikation

$$23 * 15 = ?$$

- $10111 * 1111$

10111

10111

10111

10111

-----

$$101011001 = 345$$

# Übungsaufgaben Multiplikation

$$4 * 7 = ?$$

- $100 * 111$

100

100

100

-----

$$11100 = 28$$

# Subtraktion im Binärsystem

→ Subtraktion: Addition einer negativen Zahl

A large, bold, black stylized letter 'Z' with a white diagonal stripe running from the top-left to the bottom-right.

-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

# Binärdarstellung ganzer Zahlen

Wie  $\mathbb{Z}$  darstellen?

Möglichkeit I:

MSB (Most Significant Bit,  
d.h.: erstes Bit, ganz links)

zur Kennzeichnung  
verwenden

→ MSB == 0, dann positive Zahl

→ MSB == 1, dann negative Zahl

...Probleme?

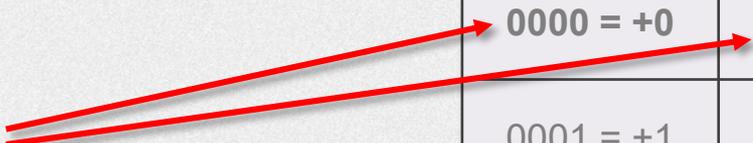
0000 = +0	1000 = -0
0001 = +1	1001 = -1
0010 = +2	1010 = -2
0011 = +3	1011 = -3
0100 = +4	1100 = -4
0101 = +5	1101 = -5
0110 = +6	1110 = -6
0111 = +7	1111 = -7

# Binärdarstellung ganzer Zahlen

Probleme!

- 0 zweimal codiert
- Rechnen verkompliziert

<b>0000 = +0</b>	<b>1000 = -0</b>
0001 = +1	1001 = -1
0010 = +2	1010 = -2
0011 = +3	1011 = -3
0100 = +4	1100 = -4
0101 = +5	1101 = -5
0110 = +6	1110 = -6
0111 = +7	1111 = -7





# Zweierkomplementdarstellung



# Zweierkomplementdarstellung



$$0000 = 0$$

$$0001 = 1$$

$$0010 = 2$$

$$0011 = 3$$

$$0100 = 4$$

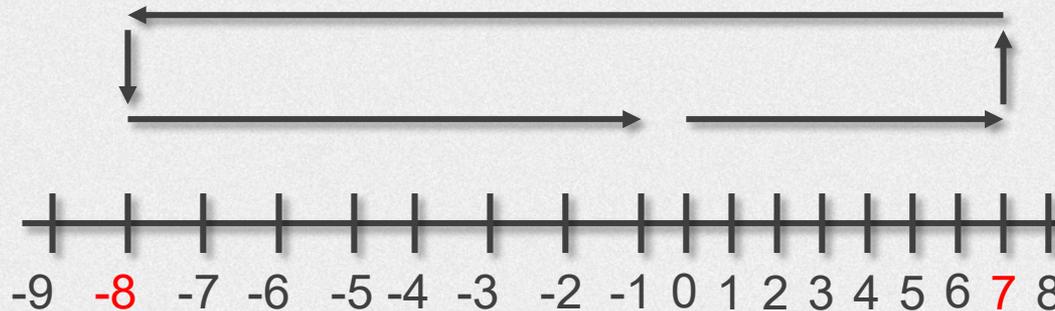
$$0101 = 5$$

$$0110 = 6$$

$$0111 = 7$$

**Darstellbarer Zahlenbereich:  $-2^{n-1}$  bis  $2^{n-1}-1$**

# Zweierkomplementdarstellung



1000 = -8	1100 = -4	0000 = 0	0100 = 4
1001 = -7	1101 = -3	0001 = 1	0101 = 5
1010 = -6	1110 = -2	0010 = 2	0110 = 6
1011 = -5	1111 = -1	0011 = 3	0111 = 7

**Darstellbarer Zahlenbereich:  $-2^{n-1}$  bis  $2^{n-1}-1$**

# Standardformate für ganze Zahlen

Größe	Java	C++	Wertebereich
8 Bit	byte	char	$-2^7 \dots 2^7-1$ oder -128 ... 127
16 Bit	short	int/short	$-2^{15} \dots 2^{15}-1$ oder -32.768 ... 32.767
32 Bit	int	int/long	$-2^{31} \dots 2^{31}-1$ oder -2.147.483.648 ... 2.147.483.647

# Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits  
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1  
1001 + 0001 = 1010

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem (unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

# Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits  
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1  
1001 + 0001 = 1010

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem (unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

1000 = -8	1100 = -4	0000 = 0	0100 = 4
1001 = -7	1101 = -3	0001 = 1	0101 = 5
1010 = -6	1110 = -2	0010 = 2	0110 = 6
1011 = -5	1111 = -1	0011 = 3	0111 = 7

# Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit

1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

# Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$15 = 1111$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:  
 $1111 = 0000\ 1111$

- Einerkomplement bilden:  
 $1111\ 0000$

- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1111\ 0000 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1111\ 0001 \end{array}$$

$$\rightarrow -15 = 1111\ 0001$$

# Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit

1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

# Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$45 = 10\ 1101$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:  
 $10\ 1101 = 0010\ 1101$
- Einerkomplement bilden:  
 $1101\ 0010$
- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1101\ 0010 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1101\ 0011 \end{array}$$

$$\rightarrow -45 = 1101\ 0011$$

# Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$17 = 1\ 0001$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:  
 $1\ 0001 = 0001\ 0001$
- Einerkomplement bilden:  
 $1110\ 1110$
- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1110\ 1110 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1110\ 1111 \end{array}$$

$$\rightarrow -17 = 1110\ 1111$$



/