



Foto: Thomas Josek

Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2022/23. Grundlagen III: Rechnen im Binärsystem. *Basierend auf Jan Wieners' Folien*

Inhalte der heutigen Sitzung

Rechnen im Binärsystem

- Addition von Binärzahlen
- Multiplikation von Binärzahlen
- (Subtraktion von Binärzahlen)

Vorzeichenbehaftete Zahlen

- Zweierkomplementdarstellung

Kurzwiederholung

Vier Zahlensysteme gegenübergestellt

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Binär	0	1	10	11	100	101	110	111	1000
Oktal	0	1	2	3	4	5	6	7	10
Hexadezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Dezimal	9	10	11	12	13	14	15	16
Binär	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
Oktal	11	12	13	14	15	16	17	20
Hexadezimal	9	A	B	C	D	E	F	10

Umwandlung Binärsystem → Dezimalsystem

Zur Umwandlung: Multiplikation der entsprechenden Ziffern mit den Zweierpotenzen:

$$\mathbf{10111} = 1*2^0 + 1*2^1 + 1*2^2 + 0*2^3 + 1*2^4$$

$$= 1*1 + 1*2 + 1*4 + 0*8 + 1*16$$

$$= 23$$

Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

Übungsaufgaben

1011 => welche Zahl im Dezimalsystem?

1 1110 => welche Zahl im Dezimalsystem?

0 0011 => welche Zahl im Dezimalsystem?

Übung: Binärzahl → Dezimalzahl

Übungsaufgaben

1011 => 11

1 1110 => 30

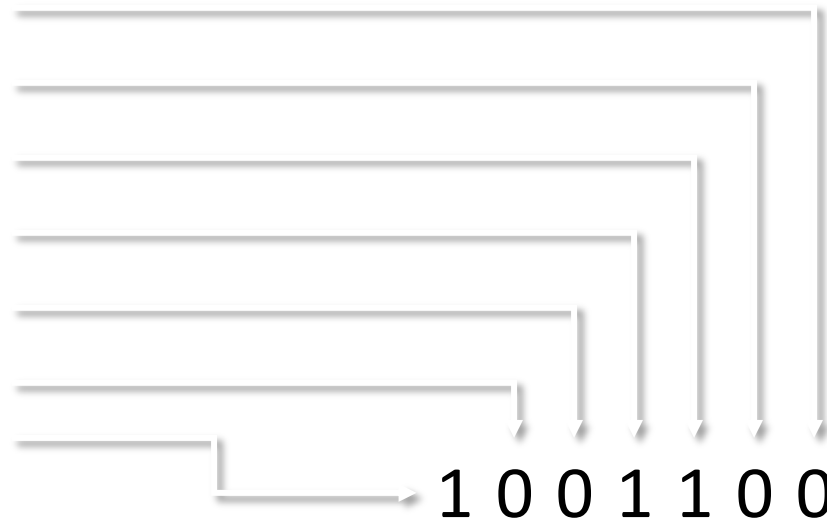
0 0011 => 3

Umwandlung Dezimal → Binärsystem

Eine Dezimalzahl lässt sich über die Division durch 2 und Aufschreiben der Reste in eine Binärzahl umwandeln (das ist eine Möglichkeit, häufig lässt sich das auch im Kopf lösen).

Beispiel: Die Zahl 76 soll ins Binärsystem umgewandelt werden

- $76 / 2 = 38$; Rest 0
- $38 / 2 = 19$; Rest 0
- $19 / 2 = 9$; Rest 1
- $9 / 2 = 4$; Rest 1
- $4 / 2 = 2$; Rest 0
- $2 / 2 = 1$; Rest 0
- $1 / 2 = 0$; Rest 1



Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

Übungsaufgaben

9 = Welche Binärzahl?

38 = Welche Binärzahl?

57 = Welche Binärzahl?

Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

Übungsaufgaben

$$9 = 1001$$

$$38 = 10\ 0110$$

$$57 = 11\ 1001$$

Übung: Dezimalzahl → Binärzahl

290 = ?

$290 / 2 = 145$, Rest: 0

$145 / 2 = 72$, Rest: 1

$72 / 2 = 36$, Rest: 0

$36 / 2 = 18$, Rest: 0

$18 / 2 = 9$, Rest: 0

$9 / 2 = 4$, Rest: 1

$4 / 2 = 2$, Rest: 0

$2 / 2 = 1$, Rest: 0

$1 / 2 = 0$, Rest: 1

→ 1 0010 0010

Rechnen im Binärsystem

Rechnen im Binärsystem: Addition

Additionsregeln

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$
- $1 + 1 = 0$ mit 1 Übertrag $\rightarrow 1\ 0$

- $1 + 1 + \text{Übertrag} = 1 + \text{Übertrag}$
- $1 + 1 + \text{Übertrag} + \text{Übertrag} = 1+1+1+1$ (4x1)

Rechnen im Binärsystem: Addition

```
  0 0 1 1
+ 0 0 1 1
+ 0 0 0 1
+ 0 1 0 1
=====
   1 1
   1 1
=====
  1 1 0 0
```

Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline \end{array}$$

Übungsaufgaben Addition

$$\begin{array}{r} 1101\ 1000 \\ + 0011\ 0111 \\ \hline 1\ 0000\ 1111 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0101\ 1011 \\ + 0000\ 1101 \\ \hline 110\ 1000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000\ 1000 \\ + 1010\ 1011 \\ \hline 1\ 0011\ 0011 \end{array}$$

Multiplikation im Binärsystem

Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts): Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0: Nullen notieren.

Beispiel:

$$47 * 17 = 101111 * 10001$$

101111* 10001

101111

000000

000000

000000

101111

1100011111

Rechnen im Binärsystem: Multiplikation

Bei jeder 1 auf der rechten Seite (von links nach rechts):
Vollständige Zahl der linken Seite notieren. Bei jeder 0:
Nullen notieren.

8 Bit → 1 Byte

4 Bit → 1 Nibble

Beispiel II:

5 * 7 = 0101 * 0111

0101 * 0111 = ?

=====

0000

0101

0101

0101

11

=====

10 0011

Übungsaufgaben Multiplikation

Berechnen Sie im Binärsystem:

- $17 * 3$
- $23 * 15$
- $4 * 7$

Übungsaufgaben Multiplikation

$$17 * 3 = ?$$

■ $10001 * 11$

10001

10001

110011 = 51

Übungsaufgaben Multiplikation

$$23 * 15 = ?$$

10111 * 1111

10111

10111

10111

10111

$$\mathbf{101011001} = 345$$

Übungsaufgaben Multiplikation

$$4 * 7 = ?$$

$$100 * 111$$

$$100$$

$$100$$

$$100$$

$$11100 = 28$$

Subtraktion im Binärsystem

→ Subtraktion: Addition einer negativen Zahl

Z

-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

Binärdarstellung ganzer Zahlen

Wie \mathbb{Z} darstellen?

Möglichkeit I:

MSB (Most Significant Bit,
d.h.: erstes Bit, ganz links)

zur Kennzeichnung
verwenden

→ MSB == 0, dann positive Zahl

→ MSB == 1, dann negative Zahl

...Probleme?

0000 = +0	1000 = -0
0001 = +1	1001 = -1
0010 = +2	1010 = -2
0011 = +3	1011 = -3
0100 = +4	1100 = -4
0101 = +5	1101 = -5
0110 = +6	1110 = -6
0111 = +7	1111 = -7

Binärdarstellung ganzer Zahlen

Probleme!

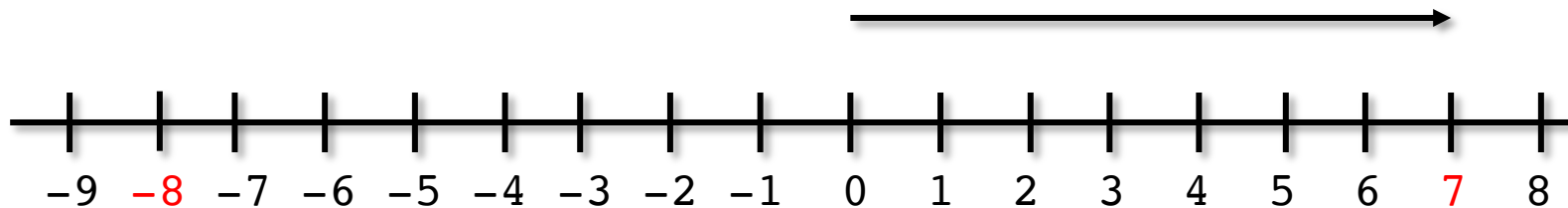
- 0 zweimal codiert
- Rechnen verkompliziert

0000 = +0	1000 = -0
0001 = +1	1001 = -1
0010 = +2	1010 = -2
0011 = +3	1011 = -3
0100 = +4	1100 = -4
0101 = +5	1101 = -5
0110 = +6	1110 = -6
0111 = +7	1111 = -7



Zweierkomplementdarstellung

Zweierkomplementdarstellung



0000 = 0

0100 = 4

0001 = 1

0101 = 5

0010 = 2

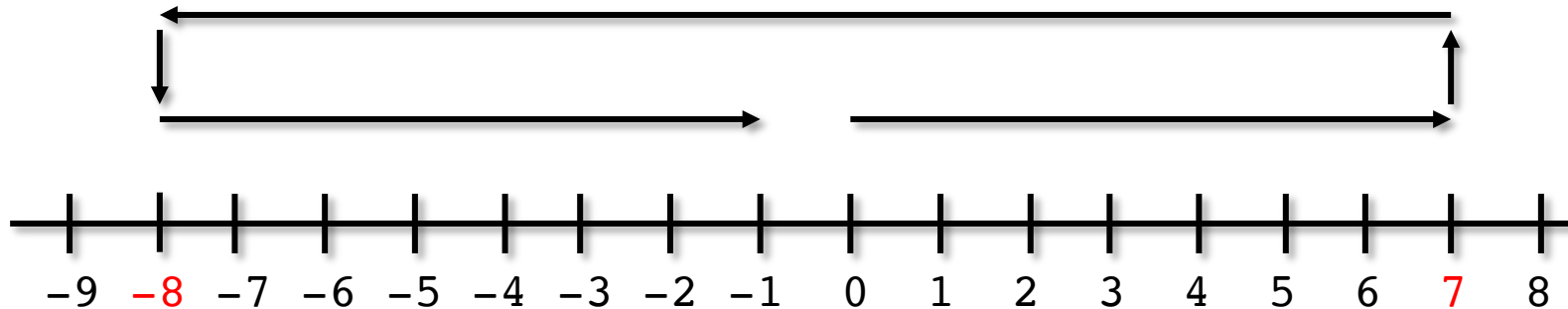
0110 = 6

0011 = 3

0111 = 7

Darstellbarer Zahlenbereich: -2^{n-1} bis $2^{n-1}-1$

Zweierkomplementdarstellung



1000 = -8	1100 = -4	0000 = 0	0100 = 4
1001 = -7	1101 = -3	0001 = 1	0101 = 5
1010 = -6	1110 = -2	0010 = 2	0110 = 6
1011 = -5	1111 = -1	0011 = 3	0111 = 7

Darstellbarer Zahlenbereich: -2^{n-1} bis $2^{n-1}-1$

Standardformate für ganze Zahlen

Größe	Java	C++	Wertebereich
8 Bit	byte	char	$-2^7 \dots 2^7-1$ oder -128 ... 127
16 Bit	short	int/short	$-2^{15} \dots 2^{15}-1$ oder -32.768 ... 32.767
32 Bit	int	int/long	$-2^{31} \dots 2^{31}-1$ oder -2.147.483.648 ... 2.147.483.647

Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1
 $1001 + 0001 = 1010$

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem
(unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

Zweierkomplement: Umrechnung

Umwandlung 6 in -6:

- Schritt 0: Binärdarstellung bilden: 0110
- Schritt I: Einerkomplement bilden, d.h. Negation aller Bits
0110 → 1001
- Schritt II: Addition von 1
1001 + 0001 = 1010

1010 ist die Entsprechung der Dezimalzahl -6 im Binärsystem (unter Verwendung der Zweierkomplementdarstellung)

1000 = -8	1100 = -4	0000 = 0	0100 = 4
1001 = -7	1101 = -3	0001 = 1	0101 = 5
1010 = -6	1110 = -2	0010 = 2	0110 = 6
1011 = -5	1111 = -1	0011 = 3	0111 = 7

Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit
1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$15 = 1111$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
 $1111 = 0000\ 1111$

- Einerkomplement bilden:
 $1111\ 0000$

- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1111\ 0000 \\ + \qquad\quad 1 \\ \hline 1111\ 0001 \end{array}$$

$$\rightarrow -15 = 1111\ 0001$$

Übungsaufgaben Zweierkomplement

→ Auffüllen mit 0 auf 8 Bit
1011 → 0000 1011

- Welche 8-Bit Binärzahl (Stichw. Zweierkomplement) entspricht der Dezimalzahl -15?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -45?
- Welche 8-Bit Binärzahl entspricht der Dezimalzahl -17?

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$45 = 10\ 1101$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
 $10\ 1101 = 0010\ 1101$

- Einerkomplement bilden:
 $1101\ 0010$

- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1101\ 0010 \\ + \quad \quad 1 \\ \hline 1101\ 0011 \end{array}$$

$$\rightarrow -45 = 1101\ 0011$$

Übungsaufgaben Zweierkomplement

$$17 = 1\ 0001$$

- Auf nächsthöheres Nibble auffüllen:
 $1\ 0001 = 0001\ 0001$

- Einerkomplement bilden:
 $1110\ 1110$

- Zweierkomplement bilden, d.h. 1 addieren:

$$\begin{array}{r} 1110\ 1110 \\ + \qquad \qquad 1 \\ \hline 1110\ 1111 \end{array}$$

$$\rightarrow -17 = 1110\ 1111$$

/