Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2022/23. Schaltalgebra: Grundgesetze und Rechenregeln. *Basierend auf Jan Wieners' Folien*

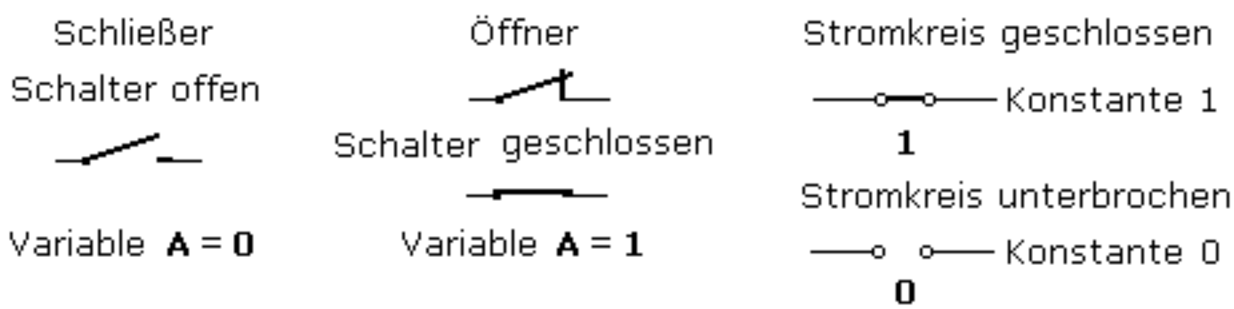
Institut für Digital Humanities, Historisch-Kulturwissenschaftliche Informationsverarbeitung | Prof. Dr. Øyvind Eide | Slavina Stoyanova

Themenüberblick „Schaltalgebra: Grundgesetze und Rechenregeln“

- Basics
  - Variable vs. Konstante
  - Theoreme
  - Kommutativ- und Assoziativgesetz
  - Distributivgesetz
  - De Morgansche Gesetze
  - Bindungsregel
- Gleichungsvereinfachung

Variable vs. Konstante

- Die Schaltalgebra kennt nur zwei **Konstante**: **0** oder **1**
- **Variable** der Schaltalgebra sind Größen, die die Werte oder Zustände **0** oder **1** annehmen können (z.B. Schalter geöffnet vs. Schalter geschlossen).



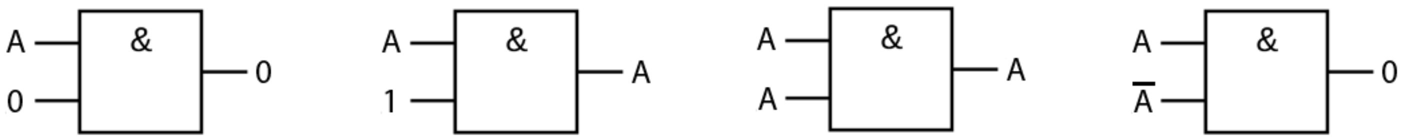
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Postulate (et es wie et es™)

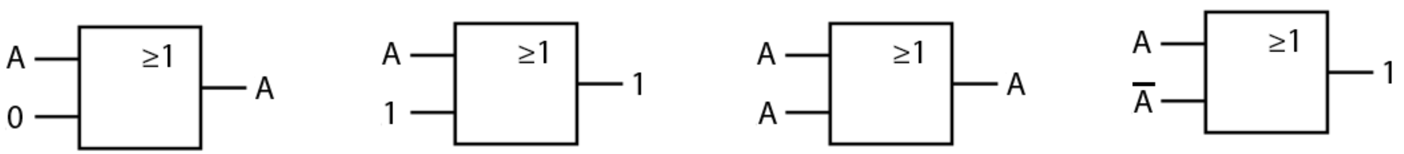
UND	ODER	NICHT
$0 \land 0 = 0$ $0 \land 1 = 0$ $1 \land 0 = 0$ $1 \land 1 = 1$	$0 \lor 0 = 0$ $0 \lor 1 = 1$ $1 \lor 0 = 1$ $1 \lor 1 = 1$	$\neg 0 = 1$ $\neg 1 = 0$

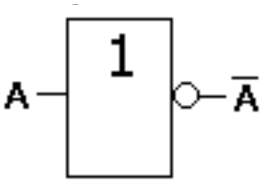
Theoreme

UND



ODER

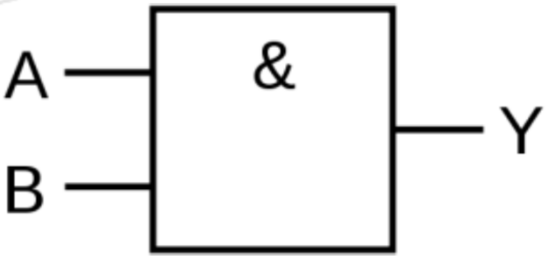




$\neg\neg A = \overline{\overline{A}} = A$

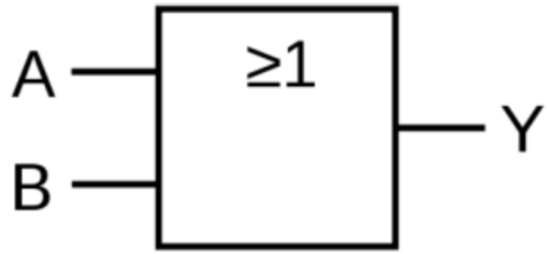
Quelle NICHT: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Konjunktion
(UND-Gatter)
$Y = A \wedge B$



A	B	**Y**
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

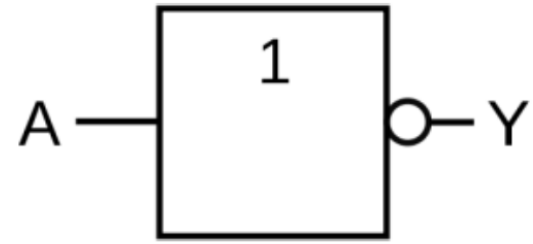
Disjunktion
(ODER-Gatter)
$Y = A \vee B$



A	B	**Y**
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

NICHT

$Y = \neg A$



A	**Y**
0	
1	

Übungsaufgabe 1

Zum gemütlichen Start: Bestimmen Sie bitte die vollständigen Wahrheitstabellen für die folgenden beiden Funktionsgleichungen:

- $Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$
- $Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

Konditional →

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$

A	B	A ∨ B	B ∧ A	Y
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$

A	B	$A \lor B$	$B \land A$	Y
0	0	0		
0	1	1		
1	0	1		
1	1	1		

Übungsaufgabe 1

Y = (A ⋁ B) → (B ⋀ A)

A	B	A ⋁ B	B ⋀ A	Y
0	0	0	0	
0	1	1	0	
1	0	1	0	
1	1	1	1	

Konditional

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$

A	B	$A \lor B$	$B \land A$	Y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Konditional

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Übungsaufgabe 1

$$Y = (A \lor B) \rightarrow (B \land A)$$

A	B	A ⋁ B	B ⋀ A	Y
0	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	1	0	**0**
1	1	1	1	**1**

Bikonditional: negiertes exklusives Oder

$A \leftrightarrow B$

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

A	B	C	$A \lor B$	$A \land C$	$(A \lor B) \land (A \land C) = X$	$Y = X \land B$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

A	B	C	$A \lor B$	$A \land C$	$(A \lor B) \land (A \land C) = X$	$Y = X \land B$
0	0	0	0			
0	0	1	0			
0	1	0	1			
0	1	1	1			
1	0	0	1			
1	0	1	1			
1	1	0	1			
1	1	1	1			

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

A	B	C	$A \lor B$	$A \land C$	$(A \lor B) \land (A \land C) = X$	$Y = X \land B$
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	0		
0	1	0	1	0		
0	1	1	1	0		
1	0	0	1	0		
1	0	1	1	1		
1	1	0	1	0		
1	1	1	1	1		

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

A	B	C	A ⋁ B	A ⋀ C	(A ⋁ B) ⋀ (A ⋀ C) = X	Y= X ⋀ B
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	1	1	

Übungsaufgabe 1

$Y = (A \lor B) \land (A \land C) \land B$

A	B	C	$A \lor B$	$A \land C$	$(A \lor B) \land (A \land C) = X$	$Y = X \land B$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1


IT'S ALWAYS SUNNY IN PHILADELPHIA
WEDS 10
FX

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

Bei UND sowie ODER lassen sich Variablen beliebig vertauschen, das Ergebnis bleibt dasselbe:

UND	$X = A \wedge B \wedge C = C \wedge A \wedge B = B \wedge C \wedge A$
ODER	$X = A \vee B \vee C = C \vee A \vee B = B \vee C \vee A$

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Assoziativgesetz (auch: Verbindungsgesetz)

Die Reihenfolge der Zuordnung der Variablen bei der UND- und ODER-Verknüpfung ist beliebig und hat keinen Einfluss auf das Ergebnis:

$$Z = A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$$

$$Z = A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

$Z = (A \lor B) \land C$

$Z = A \lor (B \land C)$

Bindungsregel

$Z = A \lor B \land C$

$Z = (A \lor B) \land C$

$Z = A \lor (B \land C)$

$X = A \lor B \land C$

nach der Vorrangregel gilt

$\boxed{X = A \lor (B \land C)}$

festgelegte Abfolge
der Verknüpfungen

$\boxed{Z = (A \lor B) \land C}$

A	B	C	$B \land C$	$A \lor (B \land C)$	$A \lor B$	$(A \lor B) \land C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

$A \lor (B \land C) \neq (A \lor B) \land C$

→ Eine UND-Verknüpfung bindet stets stärker als eine ODER-Verknüpfung.

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz)

Konjunktives Distributivgesetz

$$Z = A \land (B \lor C) = (A \land B) \lor (A \land C)$$

Disjunktives Distributivgesetz

$$Z = A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$$


#WORLDOFDANCE
NBC

Termvereinfachung I

Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

Termvereinfachung I

Die Gleichung

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M)$

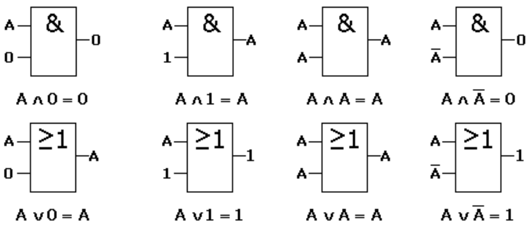
soll vereinfacht werden.

Disjunktives Distributivgesetz:

$Z = A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M) = K \lor (\overline{M} \land M)$

Termvereinfachung I



Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

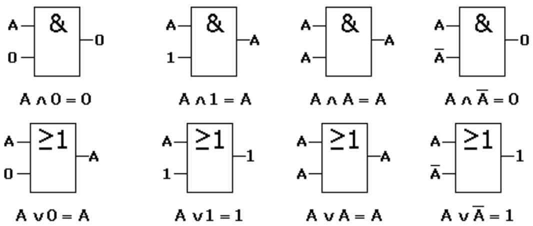
Disjunktives Distributivgesetz:

$Z = A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M) = K \vee (\overline{M} \wedge M)$

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Termvereinfachung I



Die Gleichung

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M)$

soll vereinfacht werden.

Disjunktives Distributivgesetz:

$Z = A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C)$

$Z = (K \lor \overline{M}) \land (K \lor M) = K \lor (\overline{M} \land M)$

$\overline{M} \land M = 0$

$Z = K \lor 0$

$Z = K$ 🔥

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

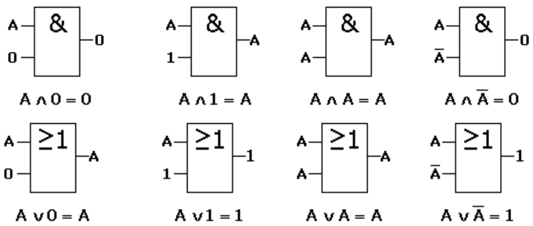
Termvereinfachung I

Die Gleichung

$Z = (K \vee \overline{M}) \wedge (K \vee M)$

soll vereinfacht werden.

Z = K



Beweis:

K	M	$\overline{M}$	$K \vee \overline{M}$	$K \vee M$	Z
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Termvereinfachung I

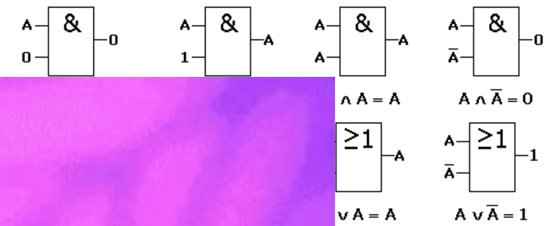
Die Gleichung

Z = (K

soll ve

Z = K

Bewei



K	M				
0	0				
0	1				
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Termvereinfachung I

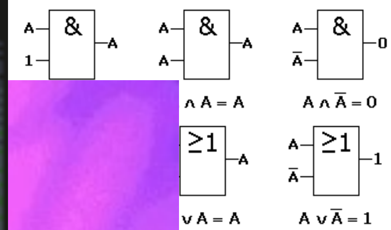
Die Gleichu

Z = (K

soll ve

Z = K

Bewei



K	M				
0	0				
0	1				
1	0	1			
1	1	0	1	1	1

Quelle Theoreme AND / OR: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

De Morgan‘sche Gesetze

De Morgan'sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: $Z = \neg(A \land B) = \mathbf{\neg A \lor \neg B}$

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

De Morgan‘sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: Z = $\neg(A \land B) = \mathbf{\neg A \lor \neg B}$

A	B	$A \land B$	$\neg(A \land B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \lor \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

De Morgan'sche Gesetze

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)

Erstes Gesetz: $Z = \neg(A \wedge B) = \mathbf{\neg A \vee \neg B}$

A	B	A ∧ B	¬(A ∧ B)	¬A	¬B	¬A ∨ ¬B
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

De Morgan‘sche Gesetze

Zweites Gesetz: $Z = \neg(A \vee B) = \mathbf{\neg A \wedge \neg B}$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

De Morgan'sche Gesetze

Zweites Gesetz: $Z = \neg(A \vee B) = \mathbf{\neg A \wedge \neg B}$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER, da nur NOR-Gatter zur Verfügung stehen:

$$X = A \wedge B = \overline{\overline{A \wedge B}}$$

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER

$$X = A \wedge B = \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$$

…und die Praxis….

Zur Realisierung der Schaltungen stehen nur bestimmte Gattertypen (UND, ODER, NOR, NAND) zur Verfügung.

Beispiel 1: Umformung UND zu ODER

$$X = A \land B = \overline{\overline{A \land B}} = \overline{\overline{A} \lor \overline{B}}$$

Beispiel 2: Umformung ODER zu UND

$$Y = A \lor B = \overline{\overline{A \lor B}} = \overline{\overline{A} \land \overline{B}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$Z \quad = A \land B \land C$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$$Z \quad = A \wedge B \wedge C$$

$$= \overline{\overline{A \wedge B \wedge C}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 3: Ein etwas längerer Term

$$Z = A \land B \land C$$

$$= \overline{\overline{A \land B \land C}}$$

$$= \overline{\overline{A} \lor \overline{B} \lor \overline{C}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$Z \quad = A \wedge \overline{B} \wedge C$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$$Z \qquad = A \land \overline{B} \land C$$

$$= \overline{\overline{A \land \overline{B} \land C}}$$

…und die Praxis….

Beispiel 4: Und noch ein etwas längerer Term

$$Z = A \land \overline{B} \land C$$

$$= \overline{\overline{A \land \overline{B} \land C}}$$

$$= \overline{\overline{A} \lor B \lor \overline{C}}$$

Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term
$A \lor B$, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter
verwenden.

Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term $A \lor B$, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter verwenden.

$$Z = A \lor B$$

$$= \overline{\overline{A \lor B}}$$

$$= \overline{\overline{A} \land \overline{B}}$$

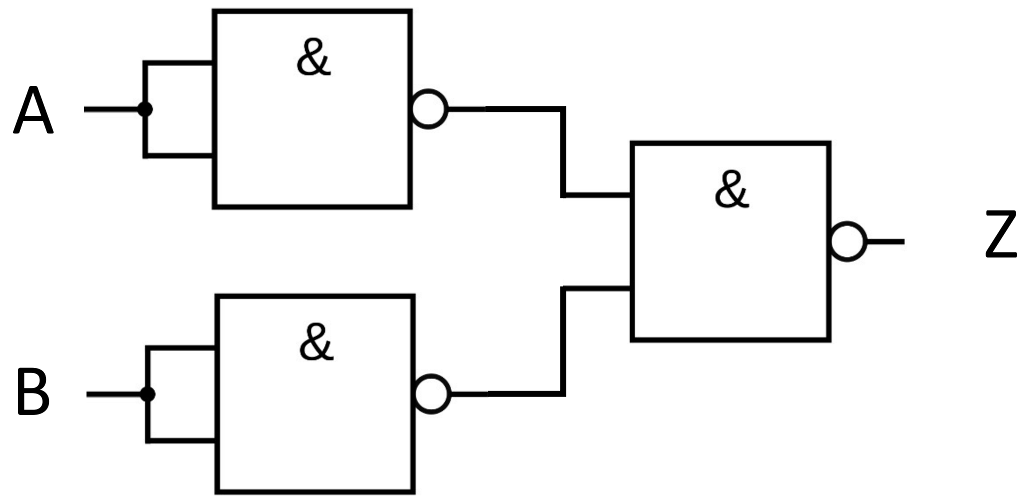
Übungsaufgabe

Realisieren Sie die Schaltung für den Term $A \vee B$, indem Sie ausschließlich NAND-Gatter verwenden.

$$Z = A \vee B$$

$$= \overline{\overline{A \vee B}}$$

$$= \overline{\bar{A} \wedge \bar{B}}$$



Grundgatter

Grundglieder: UND, ODER, NICHT

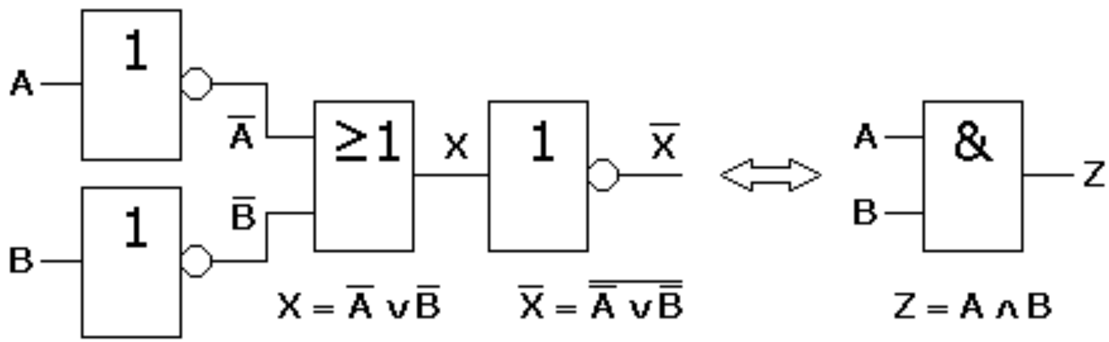
→Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

Grundgatter: OR + NOT

Grundglieder: UND, ODER, NICHT

→ Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

→ Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit **ODER**-Gliedern und mit **NICHT**-Gliedern aufgebaut werden:



$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ 1. De Morgansche Gesetz

doppelte Negation ergibt

$\overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$ ⇒ $\boxed{A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}}$

UND			ODER			
A	B	Z	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X	$\overline{X}$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

$Z = \overline{X}$

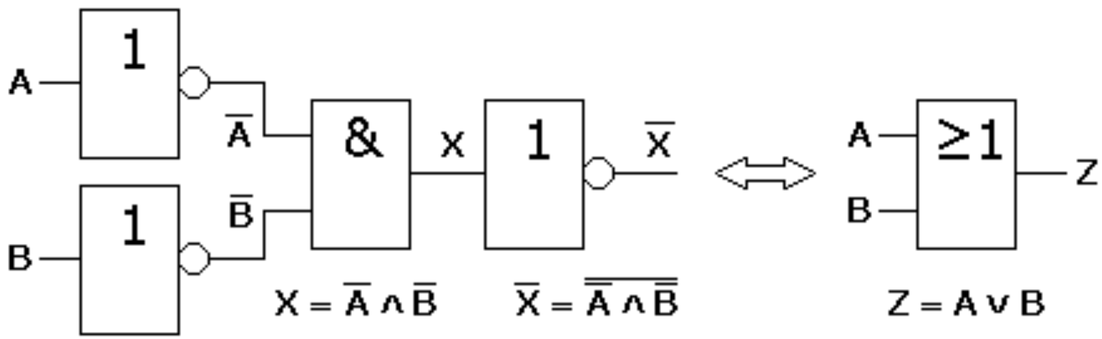
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Grundgatter: AND + NOT

Grundglieder: UND, ODER, NICHT

→ Mit den Grundgliedern lassen sich alle beliebigen Verknüpfungsschaltungen aufbauen.

→ Alle Verknüpfungsschaltungen können nur mit **UND**-Gliedern und mit **NICHT**-Gliedern aufgebaut werden.



$X = \overline{A} \wedge \overline{B}$ $\quad \overline{X} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$ $\quad Z = A \vee B$

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$ 2. De Morgansche Gesetz

doppelte Negation ergibt

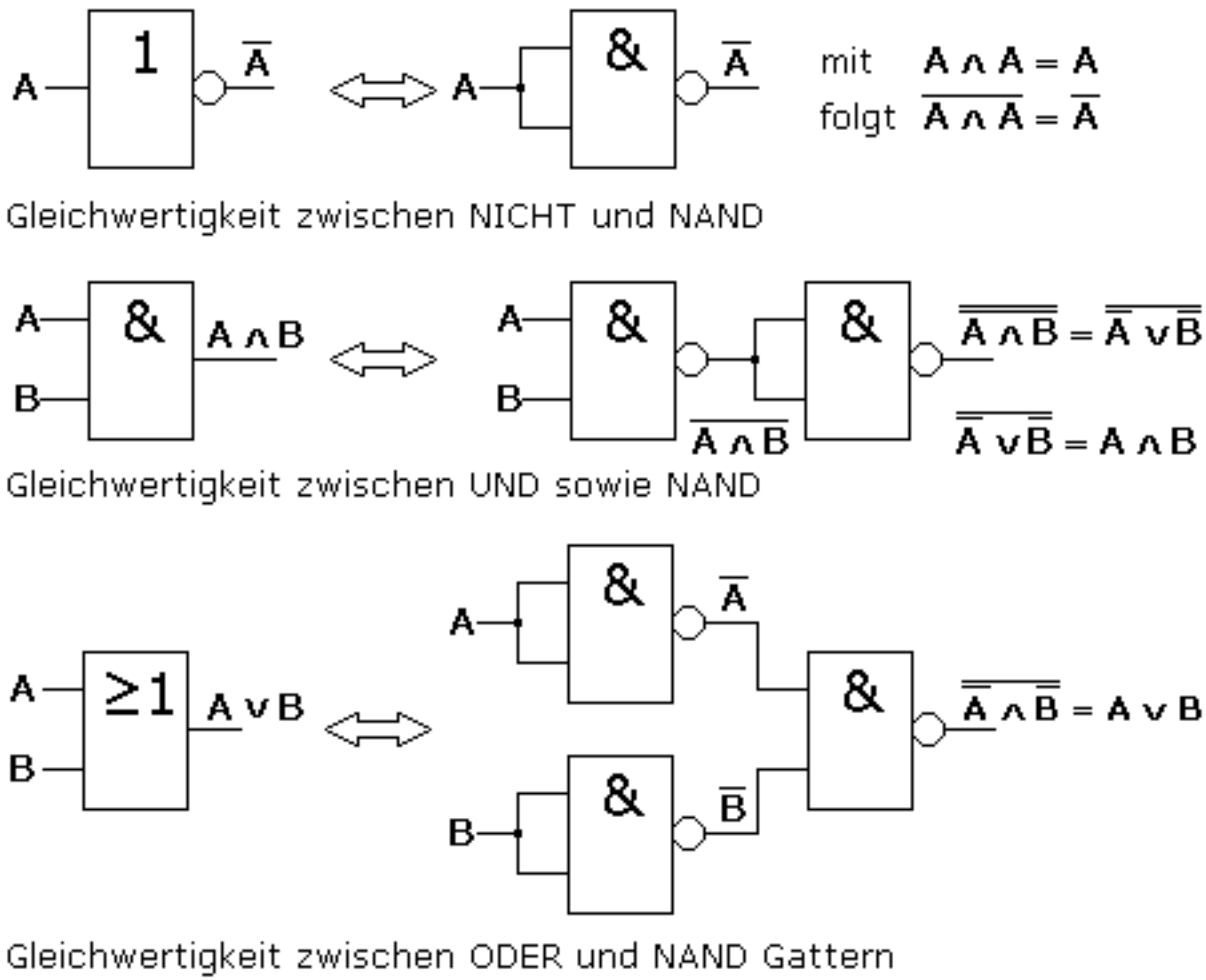
$\overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \Rightarrow \boxed{A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}$

A	B	Z	$\overline{A}$	$\overline{B}$	X	$\overline{X}$
ODER			UND			
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

$Z = \overline{X}$

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

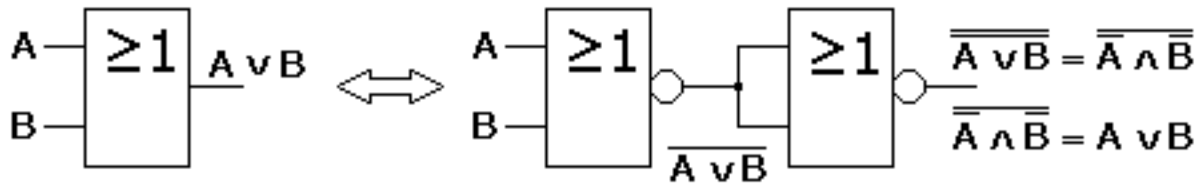
NAND FTW!



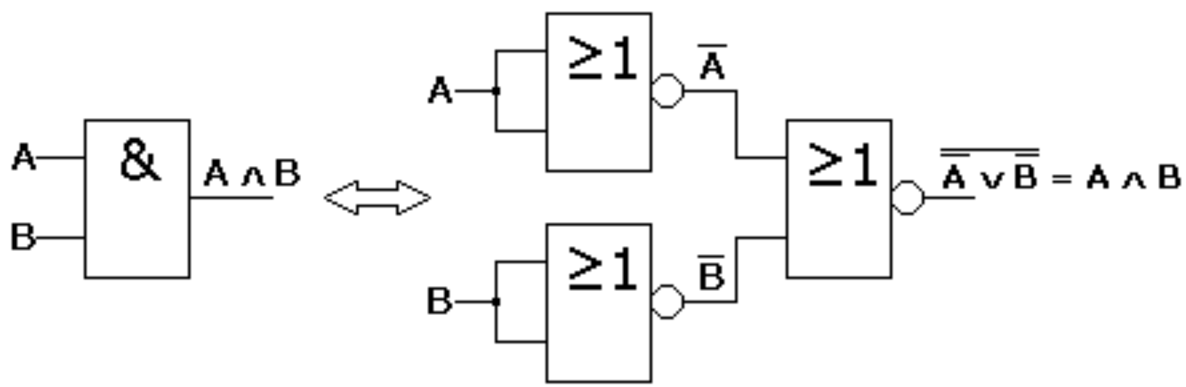
Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

NOR FTW!

Gleichwertigkeit zwischen NICHT und NOR



Gleichwertigkeit zwischen ODER und NOR-Funktionen



Gleichwertigkeit zwischen UND Gatter und NOR Gattern

Quelle: https://www.elektroniktutor.de/digitaltechnik/algebra.html

Bildnachweis:
macgyver multitool joke, paper spin, Dave O, http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Macgyver_multitool_joke.jpg

/