Basisinformationstechnologie I

Wintersemester 2022/23. Formale Sprachen und Automaten

Basierend auf Jan Wieners' Folien

Institut für Digital Humanities, Historisch-Kulturwissenschaftliche Informationsverarbeitung | Prof. Dr. Øyvind Eide | Slavina Stoyanova

Themenüberblick „Theoretische Informatik“

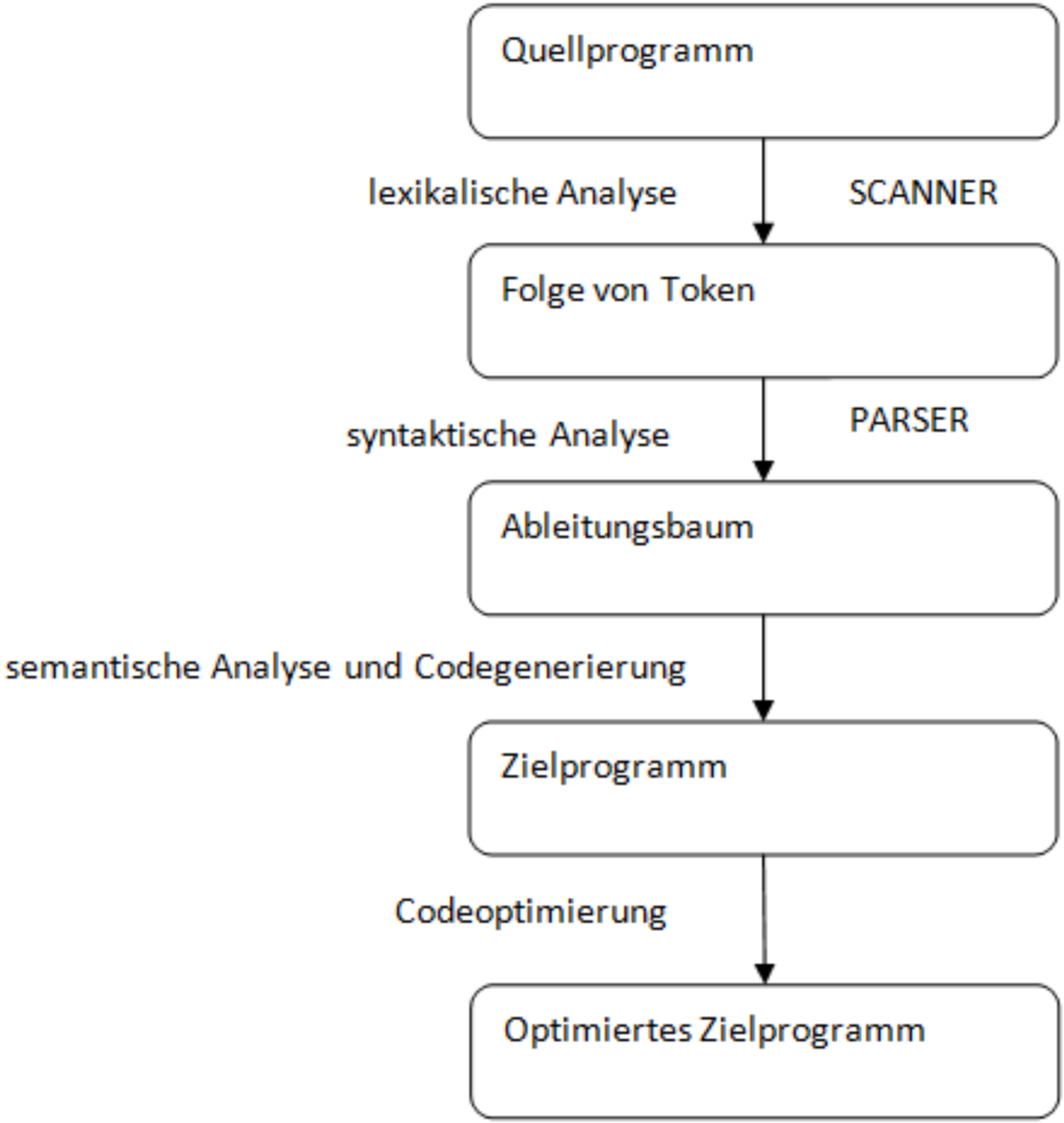
- Formale Sprachen
  - Alphabet
  - Buchstabe
  - Wort
- Automaten
  - Deterministische endliche Automaten
  - (Nichtdeterministische endliche Automaten)
  - Anwendung endlicher Automaten
- Grammatiken
- (Kellerautomat)
- (Turingmaschine)

Formale Sprachen (& Co.)

mov al, 61h

vs.

SELECT uid, name, pass, mail FROM users
WHERE uid < 2


Quellprogramm
lexikalische Analyse
SCANNER
Folge von Token
syntaktische Analyse
PARSER
Ableitungsbaum
semantische Analyse und Codegenerierung
Zielprogramm
Codeoptimierung
Optimiertes Zielprogramm

Wer reitet so spät durch Nacht und Wind?
Es ist der Vater mit seinem Kind;
er hat den Knaben wohl in dem Arm,
er fasst ihn sicher, er hält ihn warm.

Mein Sohn, was birgst du so bang dein Gesicht? -
Siehst Vater, du den Erlkönig nicht?
Den Erlenkönig mit Kron' und Schweif? -
Mein Sohn, es ist ein Nebelstreif.

Die Möglichkeiten der deutschen Grammatik können einen, wenn man sich darauf, was man ruhig, wenn man möchte, sollte, einlässt, überraschen.

Halbblutlehrerin (🏡) @MelsGedanken · 16. März 2019

Gestern wurde mir ein Antrag auf Unterrichtsbefreiung vorgelegt:

„Bitte befreien Sie meinen Sohn Justin am nächsten Freitag vom Unterricht, weil Justin seine Tante heiratet."

Gratulier ich dem Bub jetzt? Meld ich das dem Jugendamt? Oder schenke ich der Familie einen Duden?

632 3.845 21.771

Wir essen jetzt, Opa!

Wir essen jetzt Opa!


Dieser Bereich wird zur
Verhütung von Straftaten
durch die Polizei videoüberwacht
Polizeipräsidium Westhessen
-Polizeidirektion Limburg-Weilburg-

Grammatiken

Grammatikbeispiel natürliche Sprache: deutsche Sprache

<Satz>	→	<Nominalsatz> <Verb>
<Nominalsatz>	→	<Artikel><Substantiv> ODER <Artikel><Adjektiv><Substantiv>
<Artikel>	→	das | die
<Adjektiv>	→	große | kleine
<Substantiv>	→	Klavier | Katze
<Verb>	→	schläft

Definition:

- Ausdrücke in spitzen Klammern, z.B. <Verb>: **Variablen** oder **Nichtterminalsymbole**
- Andere Ausdrücke, z.B. „schläft“: **Terminalsymbole**

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 65 f.

Grammatiken

Grammatikalisch richtig und sinnvoll:
„Die kleine Katze schläft.“

Grammatikalisch falsch
(zwar richtig nach dem vorhergehenden Beispiel, jedoch falsch in der Grammatik des Deutschen):
„Das große Katze schläft.“

Grammatikalisch richtig, jedoch sinnlos:
„Das große Klavier schläft.“

Formale Sprachen

Formale Sprache

- z.B. Programmiersprache
- auf Basis einer verhältnismäßig kleinen Menge von Regeln werden Programme formuliert, die der Rechner verstehen kann

Zu klären (natürliche und formale Sprache):

- Alphabet
- Buchstabe
- Wort
- …

Definitorisches: Alphabet, Wort, Sprache

Alphabet?

Alphabet.

- endliche, nichtleere Menge von Zeichen (auch: Buchstaben oder Symbole → formale Einheit, die nicht weiter definiert wird)

-**V** oder **Σ** (Sigma) als Abkürzung für Alphabete

Σ Binärcode = {???}

$\Sigma_{\text{Binärcode}} = \{0,1\}$

$\Sigma_{\text{Hexadezimalcode}} = \{???\}$

$\Sigma_{\text{Binärcode}} = \{ 0,1 \}$

$\Sigma_{\text{Hexadezimalcode}} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$

Wort.

- Ein Wort über einem Alphabet Σ ist eine endliche Folge von Zeichen aus Σ.

- Es existiert genau ein Wort über Σ der Länge 0, das Leerwort, das wir mit ε (Epsilon) bezeichnen

- Beispiel: Aus den Zeichen „a“, „b“, „c“ lassen sich Wörter wie „cba“ oder „aab“ bilden.

w = Haus
|w| = 4

Alphabet? Wort?

Σ = { Anweisung, Bedingung, if, then, else, begin, end, while }

w = if Bedingung then Anweisung end

|w| = 5

Die **Menge aller Wörter**, die mit Zeichen aus **Σ** gebildet werden können, wird mit **Σ*** bezeichnet

→ Jede beliebige Teilmenge von **Σ*** wird als **formale Sprache** bezeichnet.

Sprache

Die wichtigste Operation für Wörter besteht aus dem **Verketten** einzelner Wörter
→ **Komposita** (z.B. Dampfschiffahrt).

Beispiel: **Σ** = {0, 1}

Die Wörter über **Σ** (Sigma) sind alle endlichen 0-1-Folgen inklusive des Leerwortes **ε** (Epsilon), d.h.:

Σ * = { Epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, …}

→ Wir bezeichnen Sprachen mit dem Buchstaben **L** (Language)

Eine typische Sprache L über **Σ** ist die Menge aller vorzeichenlosen Binärzahlen ohne führende Nullen: L = {0, 1, 10, 11}

Zwischenstand

- Formale- vs. natürliche Sprachen
- Grammatik
- Alphabet
- Buchstabe
- Wort

- ToDo → Konzepte: Automaten & Co.

Automaten


BOULANGERIE AUTOMATIQUE
AH-057-QY


24h
Times
タイムズ代々木駅前
クレジット
ポイント
最大料金
HOT
ドリンク
POKKA
お買得コーナー
お買得コーナー
乗ってる?
Times Car PLUS
知ってる?
pokka sapporo
Asahi SOFT DRINKS
乗ってる?
Times Car PLUS
知ってる?
Asahi SOFT DRINKS
CALPIS


HOSTED ON
LiveLeak
Asahi
生
Asahi
生


1 x 2 Kč
1 x 2 Kč


Hall
TABAKWAREN
CIGARETTEN


www.schlauchOmat.de
Nie mehr ohne…
Continental
Fahrradschläuche
www.conti-fahrradreifen.de
Anwahl gesperrt? Bitte kontaktieren Sie:
SFR 10.-
Taste ganz eindrücken


FAIL
PEPSI
Coke
Coke
Coke
Coke
Coke
Coke
failblog.org


Cheerios
Cheerios

Gemeinsamkeiten?
Automatencharakteristika?

→ Zustände, Aktionen, Zustandsübergänge / Transitionen

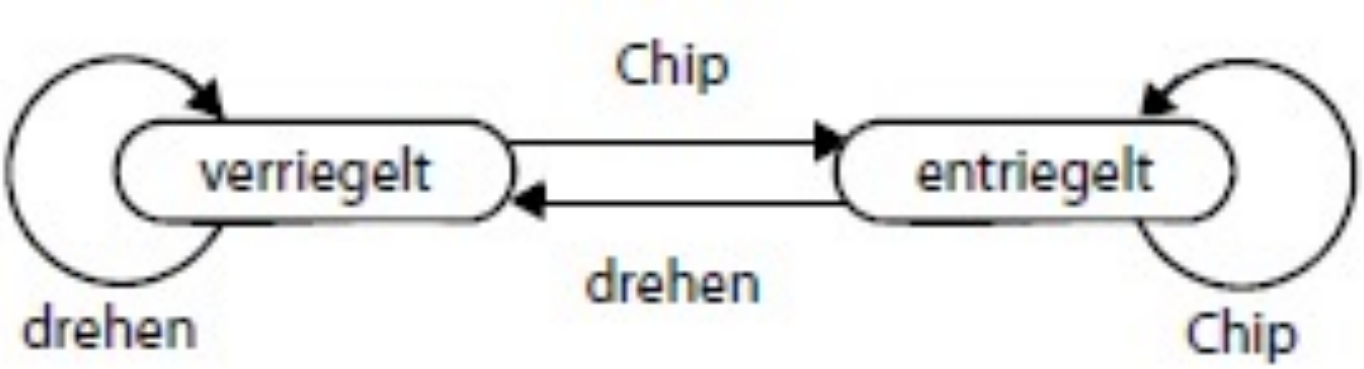

Sortie
N°1

Endliche Automaten

Beispiel Drehkreuzautomat:

- Verwendet wird das Alphabet
  Σ = { „Chip“, „drehen“}

Endliche Automaten



Zustände / Zustandsübergänge:

- Verriegelt: Im verriegelten Zustand lassen sich die Arme nicht drehen
- Chipeinwurf: Einwurf entriegelt Sperre
- Im entriegelten Zustand: Chipeinwurf wirkungslos
- Im entriegelten Zustand: Werden die Arme gedreht, geht der Automat in den Zustand „verriegelt“ zurück

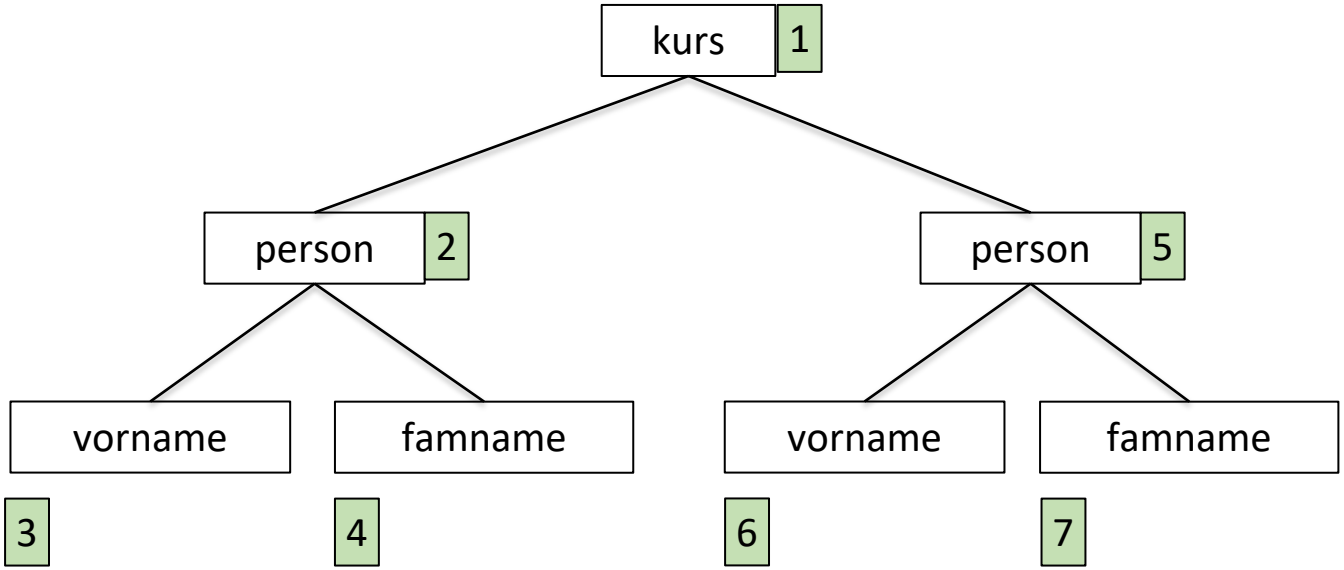
Abb.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 15.

Endliche Automaten

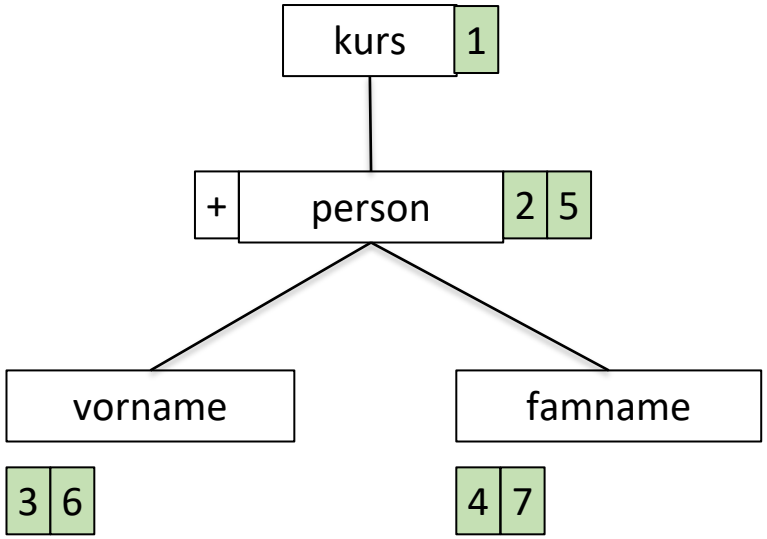
Beispiel:

```
<html>
    <head>
        <title>Ein HTML-Dokument</title>
    </head>
    <body>Inhalt des HTML-Dokumentes</boby>
</html>
```

Validation graph traversal



XML



DTD

Formale Definition DEA:

Ein deterministischer endlicher Automat […] besteht […] aus

- einem Alphabet **Σ**, das die zulässigen Eingabezeichen auflistet,
- einer endlichen Menge **Z** von Zuständen
- und einer Vorschrift **δ** (Delta), die die Zustandsübergänge beschreibt.

Zusätzlich verfügt ein Automat über einen speziellen **Startzustand** sowie einen oder mehrere akzeptierende Zustände (auch **Endezustände** genannt).

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 18.

Formale Definition DEA, kurz und knackig:

Ein DEA besteht aus den fünf Komponenten („fünf-Tupel“) **Z**, **Σ**, **δ**, $\mathbf{z_0}$, **E**

- **Z** ist eine endliche Menge von **Zuständen**
- **Σ** ist ein Alphabet, das **Eingabealphabet**
- **δ** : Z x **Σ** → **Z** ist die **Übergangsfunktion**
- $\mathbf{z_0} \in$ **Z** ist der **Startzustand**
- **E** $\subseteq$ **Z** ist die Menge der **Endezustände** (E ist Teilmenge der Menge von Zuständen Z)

Beispiel: Automat zur lexikalischen Analyse

Der Automat A_{LA}=(**Z**, **Σ**, **δ**, $\mathbf{z_0}$, **E**) prüft, ob die Eingabe eine korrekt geschriebene ganze Zahl ohne führende Nullen darstellt.

Gültige Eingabezeichen:
Σ = {-, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.

Deterministischer endlicher Automat

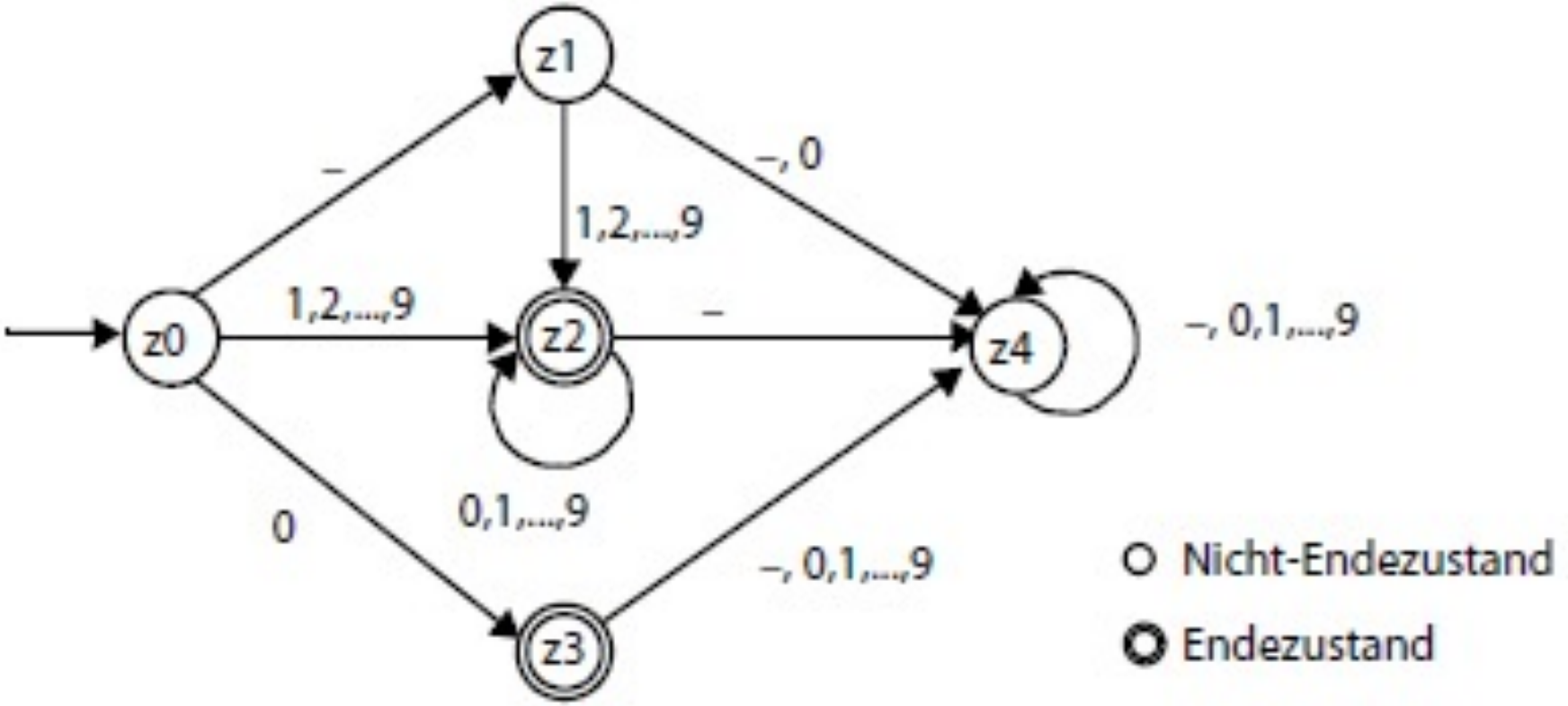
Übergangsdiagramm:

- Jeder in Z enthaltene Zustand wird durch einen **Knoten** dargestellt
- Für jeden Zustand $\mathbf{z_0}$ aus Z und für jedes Eingabesymbol a aus **Σ** sei $\boldsymbol{\delta}(z_0, a)=p$
  → Das Übergangsdiagramm enthält dann einen Pfeil, der von Knoten z_0 zu Knoten p führt und mit a beschriftet ist
- Knoten, die **akzeptierenden Zuständen** entsprechen, werden durch eine doppelte Kreislinie gekennzeichnet.

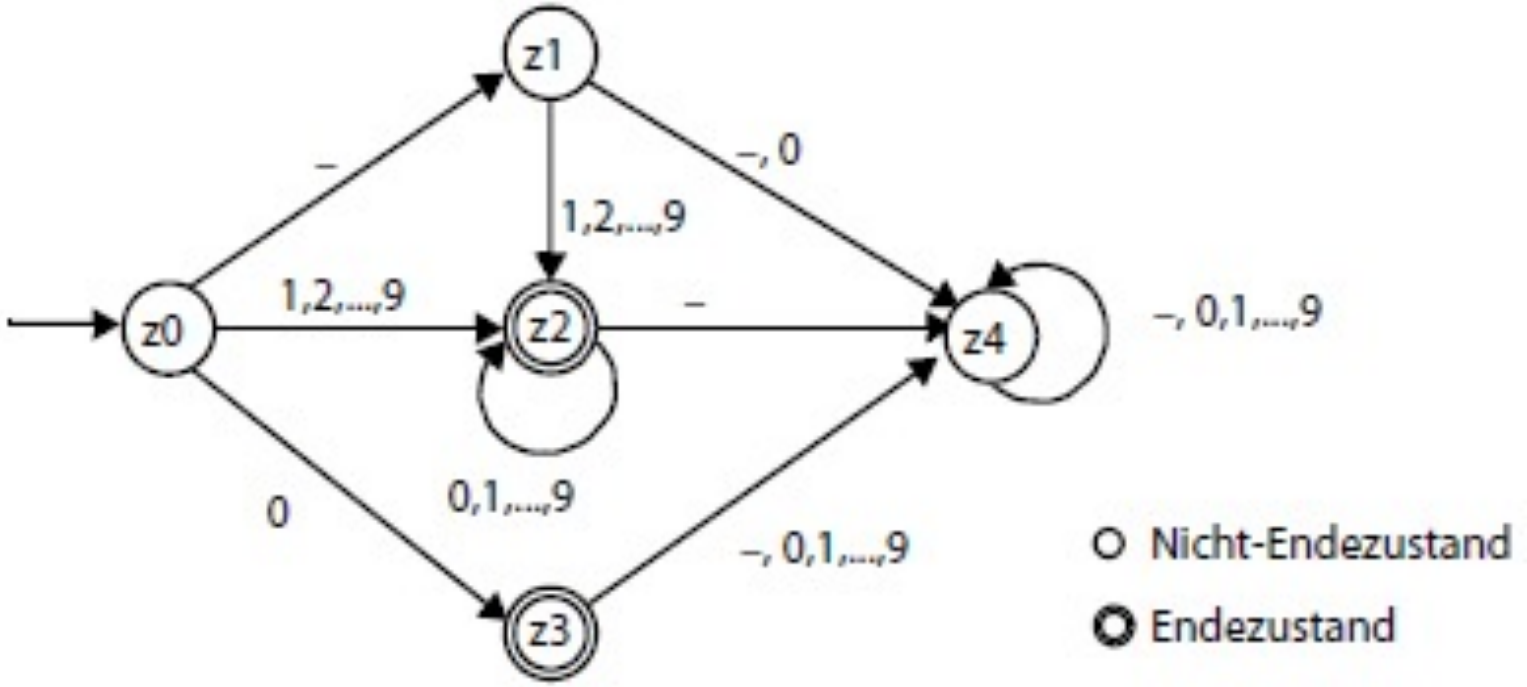
Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.

Deterministischer endlicher Automat

Zustands-/Übergangsdiagramm:



Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.

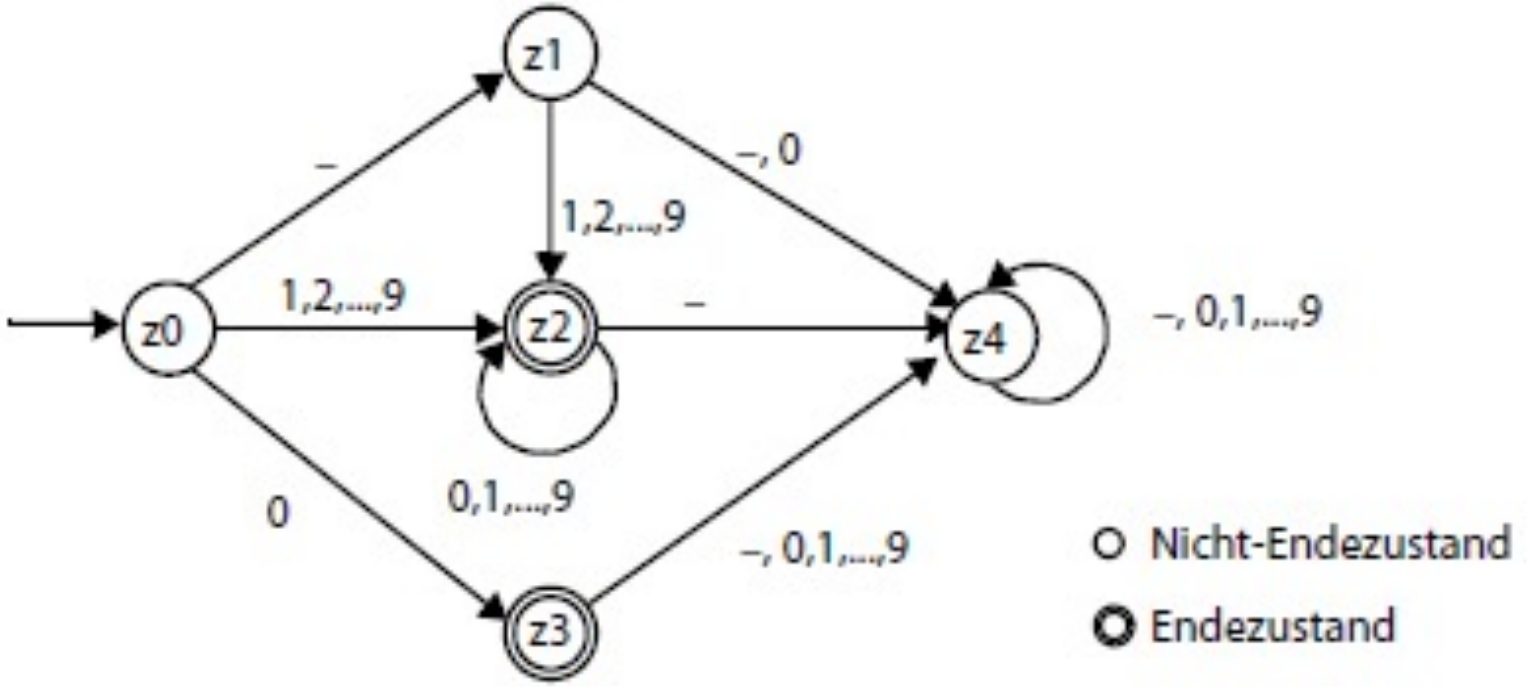


Fall I:

Zu Beginn, d.h. im Startzustand z_0, können drei Fälle unterschieden werden:

- Ist das erste Eingabezeichen eine 0, so springt der Automat in den Zustand z_3: $(z_0, 0) \rightarrow (z_3, \varepsilon)$
- z_3 muss ein akzeptierender Zustand sein, da 0 ein gültiges Eingabewort ist.
- Anschließend darf kein weiteres Zeichen mehr kommen, weil führende Nullen nicht erlaubt sind.
  Z.B.: $(z_3, 0) \rightarrow (z_4, \varepsilon)$

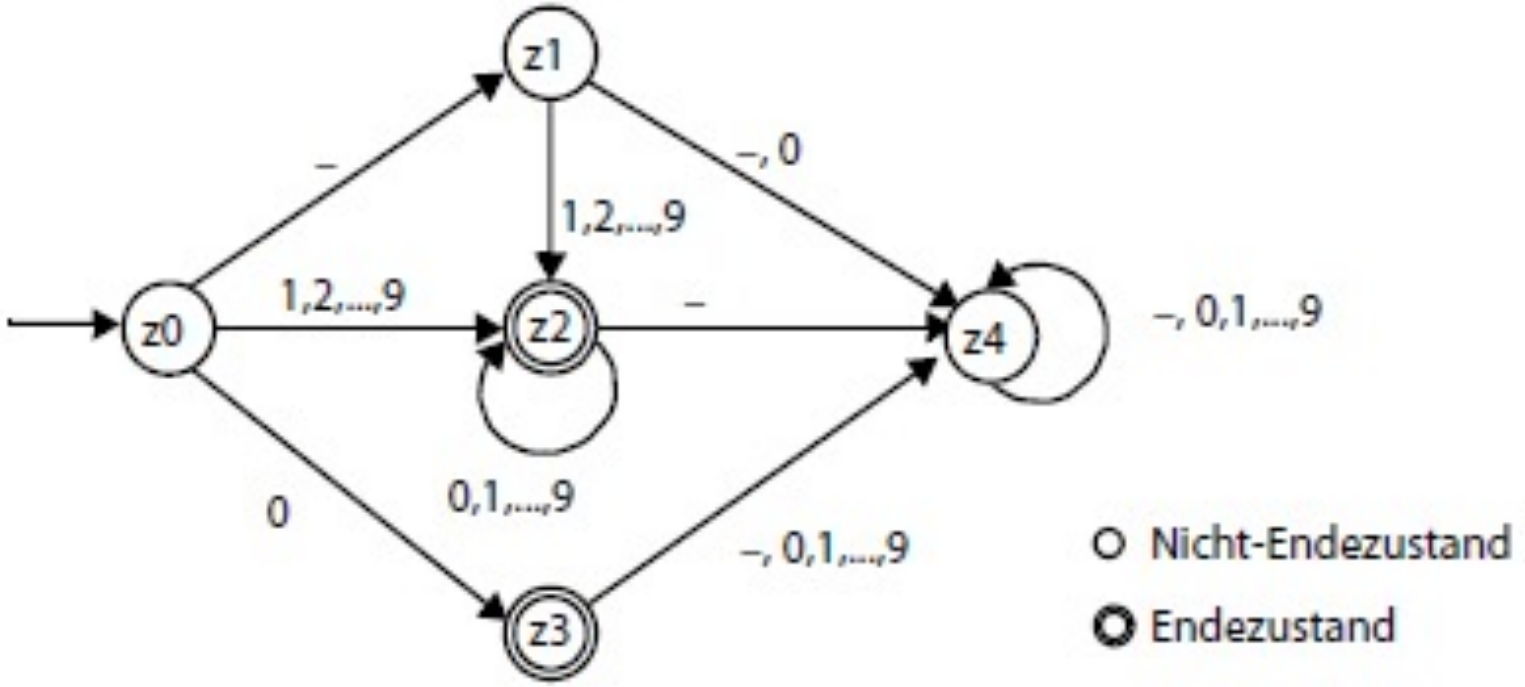
Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.



Fall II:

- Ist das erste Eingabezeichen nicht 0 und auch nicht das Minuszeichen, so springt der Automat in den Zustand z_2.
  Z.B.: $(z_0, 3) \rightarrow (z_2, \varepsilon)$
- Anschließend dürfen beliebig viele Ziffern, jedoch kein Vorzeichen kommen.
  Z.B.: $(z_2, 5) \rightarrow (z_2, \varepsilon)$
  oder (kein gültiger Endzustand) $(z_2, -) \rightarrow (z_4, \varepsilon)$

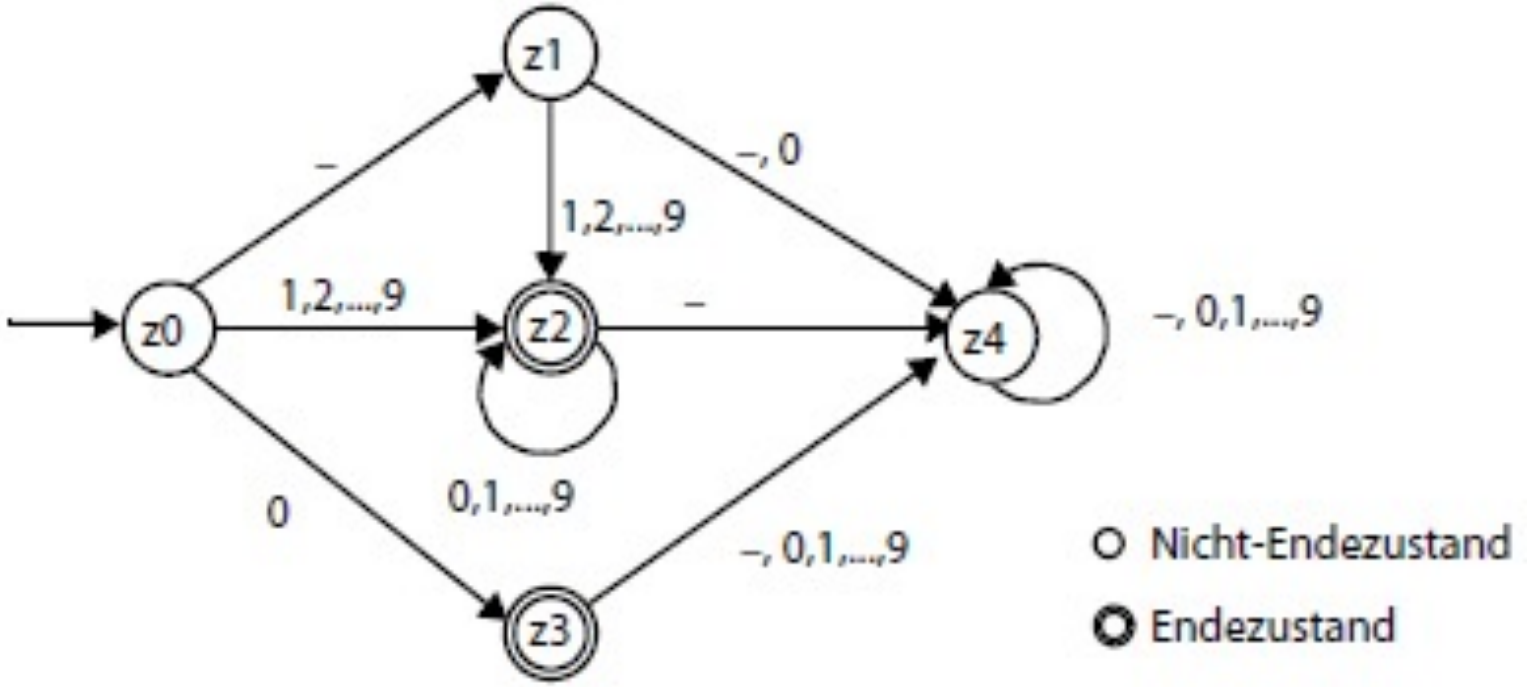
Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.



Fall III:

- ???

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.



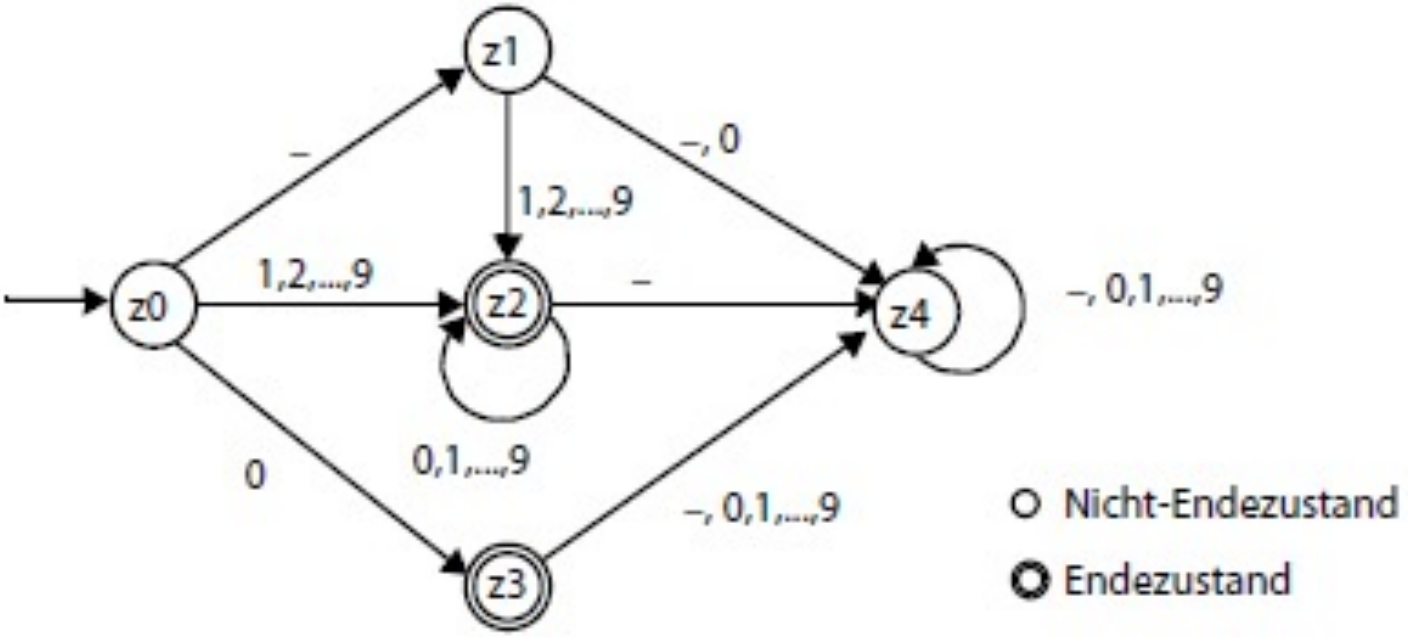
Fall III:

- Ist das erste Eingabezeichen das Vorzeichen, so springt der Automat in den Zustand z_1.
- Folgt nun eine weitere Ziffer ungleich 0, so springt der Automat in den Zustand z_2.

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 19 f.

Übung

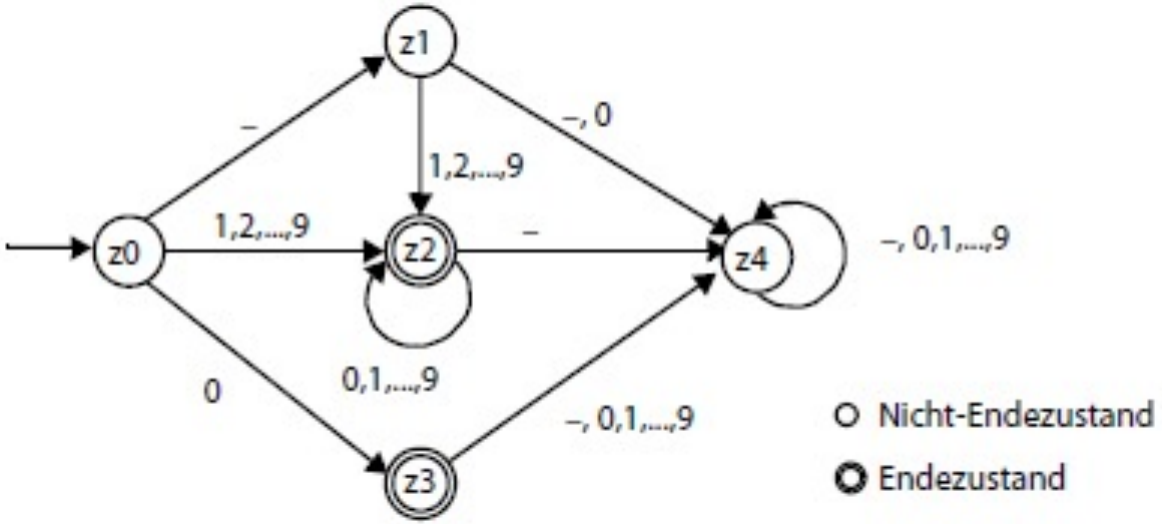
Beispiel: Eingabe „-153“



Ist das Eingabewort „-153“ eine korrekt geschriebene ganze Zahl?

Übung

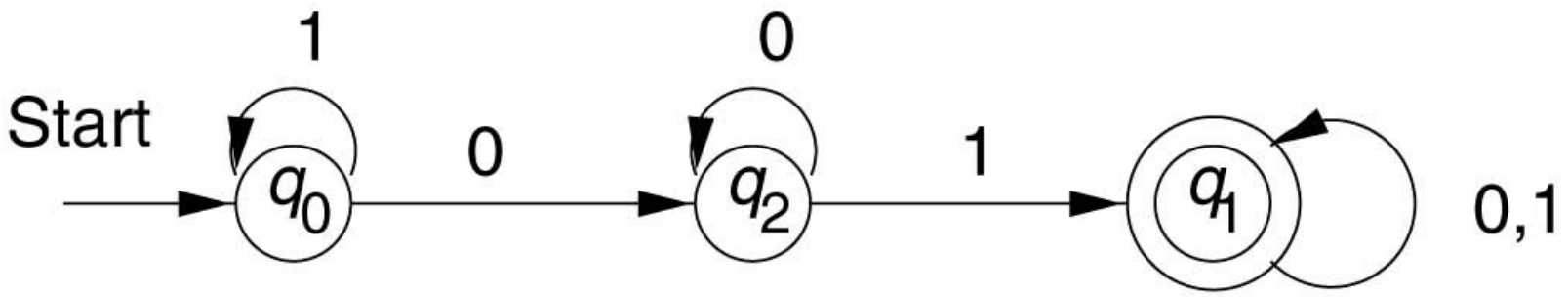
Beispiel: Eingabe „-153“



- Verlauf: $(z_0, -153) \rightarrow (z_1, 153) \rightarrow (z_2, 53) \rightarrow (z_2, 3) \rightarrow (z_2, \varepsilon)$
- Fazit: Die Verarbeitung endet im Zustand z_2, der ein Endezustand ist. Das Eingabewort „-153“ ist folglich eine korrekt geschriebene ganze Zahl.
- Die Menge aller Eingabewörter, die vom Automaten A akzeptiert werden, wird als **die von A akzeptierte Sprache** bezeichnet

Übung

Wie reagiert der folgende **DEA** auf die Eingabe „111001“? Verarbeitet der Automat die Eingabe?



Zwischenstand II

Automaten

- Deterministische endliche A.
- [Nichtdeterministische A.]

ToDo:

- Grammatiken
- Kellerautomat
- Turingmaschine

Grammatiken

Grammatiken

Grundfrage: Wie erkennen wir, ob ein „Satz“ einer Programmiersprache wohlgeformt, d.h. korrekt ist?

Lösung: Grammatik → Regelwerk, das beschreibt, wie syntaktisch korrekte Wörter und Sätze einer Sprache, z.B. einer Programmiersprache gebildet werden

Grammatiken

Grammatikbeispiel natürliche Sprache: deutsche Sprache

<Satz>	→	<Nominalsatz> <Verb>
<Nominalsatz>	→	<Artikel><Substantiv> || <Artikel><Adjektiv><Substantiv>
<Artikel>	→	das | die
<Adjektiv>	→	große | kleine
<Substantiv>	→	Klavier | Katze
<Verb>	→	schläft

Definition:

- Ausdrücke in spitzen Klammern, z.B. <Verb>: **Variablen** oder **Nichtterminalsymbole**
- Andere Ausdrücke, z.B. „schläft“: **Terminalsymbole**

Vgl.: Socher, Rolf: Theoretische Grundlagen der Informatik. München 2008, Carl Hanser Verlag. S. 65 f.

Grammatiken

Definition: Eine Grammatik G ist ein **Quadrupel**
(d.h. ein System mit **4** charakteristischen Bestandteilen):

G = {V, Σ, P, S}

- **V** bezeichnet eine endliche Menge von Variablen

- **Σ** ist das Terminalalphabet, d.h. die Menge der Terminalen Symbole. Terminale Symbole bilden das Alphabet der Sprache, sind nicht weiter zerlegbar (notiert als Kleinbuchstaben)

- **P** ist eine Menge von **Produktionen**, d.h. eine endliche Menge von Regeln. Beispiel: <Satz> → <Nominalsatz><Verb>

- **S** ist die **Startvariable**

Grammatiken

Chomsky-Hierarchie (sowohl für natürliche, als auch für formale Sprachen):

- Chomsky-**Typ 0**, auch: **allgemeine Grammatik**.
  Chomsky-**Typ 1**, auch: **kontextsensitive Grammatik**.
  Chomsky-**Typ 2**, auch: **kontextfreie Grammatik**.
  Chomsky-**Typ 3**, auch: **reguläre Grammatik**.

Automaten

- **Typ 0** (allgemein) → **Turing-Maschine**
- **Typ 1** (kontextsensitiv) → **linear beschränkter Automat**
- **Typ 2** (kontextfrei) → **Kellerautomat**
- **Typ 3** (regulär) → **endlicher Automat**

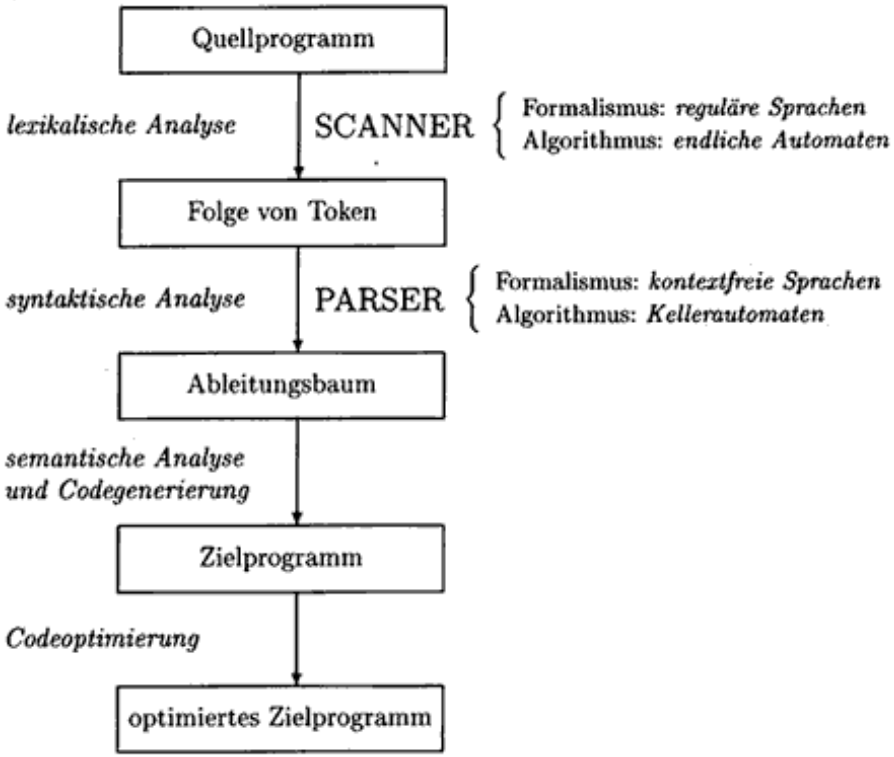
Grammatiken und die Praxis

▪ **Typ 0** (allgemein)	→ **Turing-Maschine**
▪ **Typ 1** (kontextsensitiv)	→ **linear beschränkter Automat**
▪ **Typ 2** (kontextfrei)	→ **Kellerautomat**
▪ **Typ 3** (regulär)	→ **endlicher Automat**

Grammatiken und die Praxis

Wofür der Aufwand?

- Compilierung: Stellt die Eingabe ein zu akzeptierendes Programm dar?

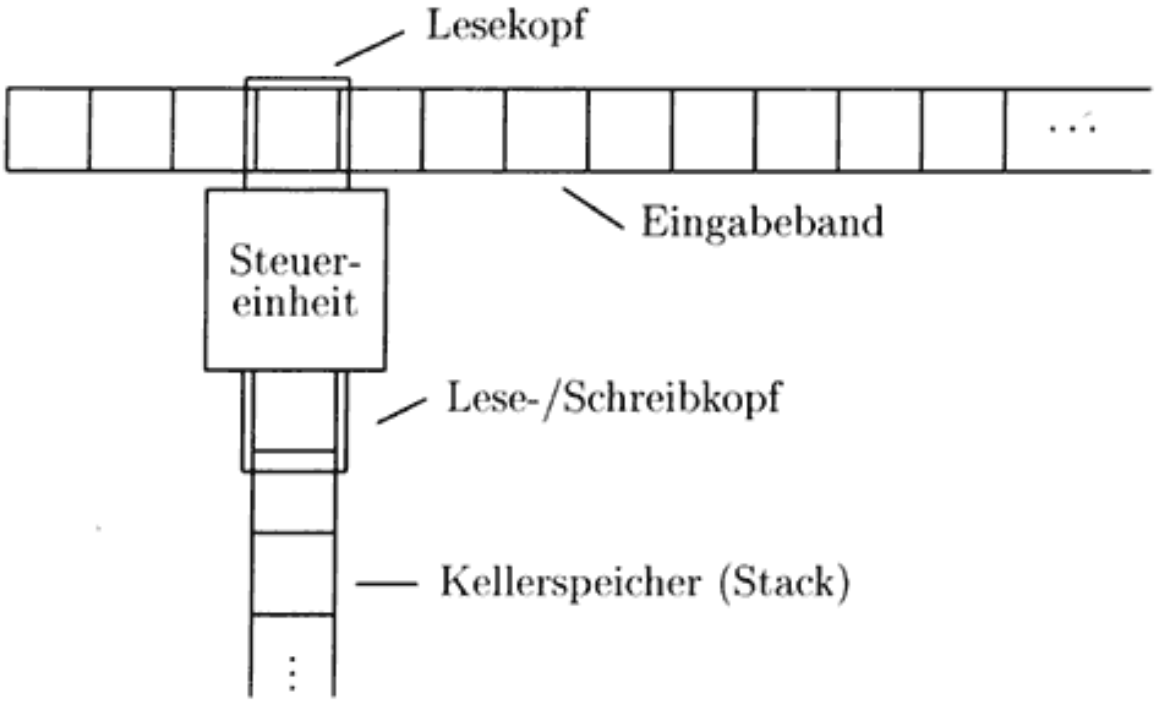


Kellerautomat

Kellerautomat

Intention: Endlichen Automaten fehlt ein Speicher, der beliebig viele Informationen speichern kann und nicht – wie DEA – von vornherein, d.h. durch die Anzahl ihrer Zustände, beschränkt ist.

Lösung: **Kellerautomat**



Kellerautomat

Formale Definition: Ein nichtdeterministischer Kellerautomat (mit Endzuständen) ist ein **7-Tupel**):
$\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{q_M}, \boldsymbol{K_M}, \boldsymbol{F})$

- **Z** ist die Zustandsmenge
- **V** ist das Eingabealphabet
- **U** ist das Kelleralphabet.
- $\boldsymbol{\delta}$ (Delta) ist die Überführungsrelation. Die Elemente aus δ heißen Anweisungen.
- $\mathbf{q_M}$ ist der Startzustand. Der Kellerautomat befindet sich in diesem Zustand, bevor ein Zustandsübergang erfolgt ist.
- $\mathbf{K_M}$ ist das Anfangskellerzeichen. Anfangs enthält der Kellerspeicher nur das Startsymbol.
- **F** ist die Menge der akzeptierenden Zustände oder Endzustände.

Turing-Maschine

Turing-Maschine

Anforderung: Entwurf eines allgemeineren Automaten

Auflösung der Beschränkungen des Kellerspeichers, u.a. dass nur an dem einen Ende des Speichers ein- und ausgelesen werden kann

→ Automat, der wahlfreien Zugang (random access) auf alle Speicherplätze erlaubt

Formuliert von Alan M. Turing in „On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem“ (1937)

Turing-Maschine

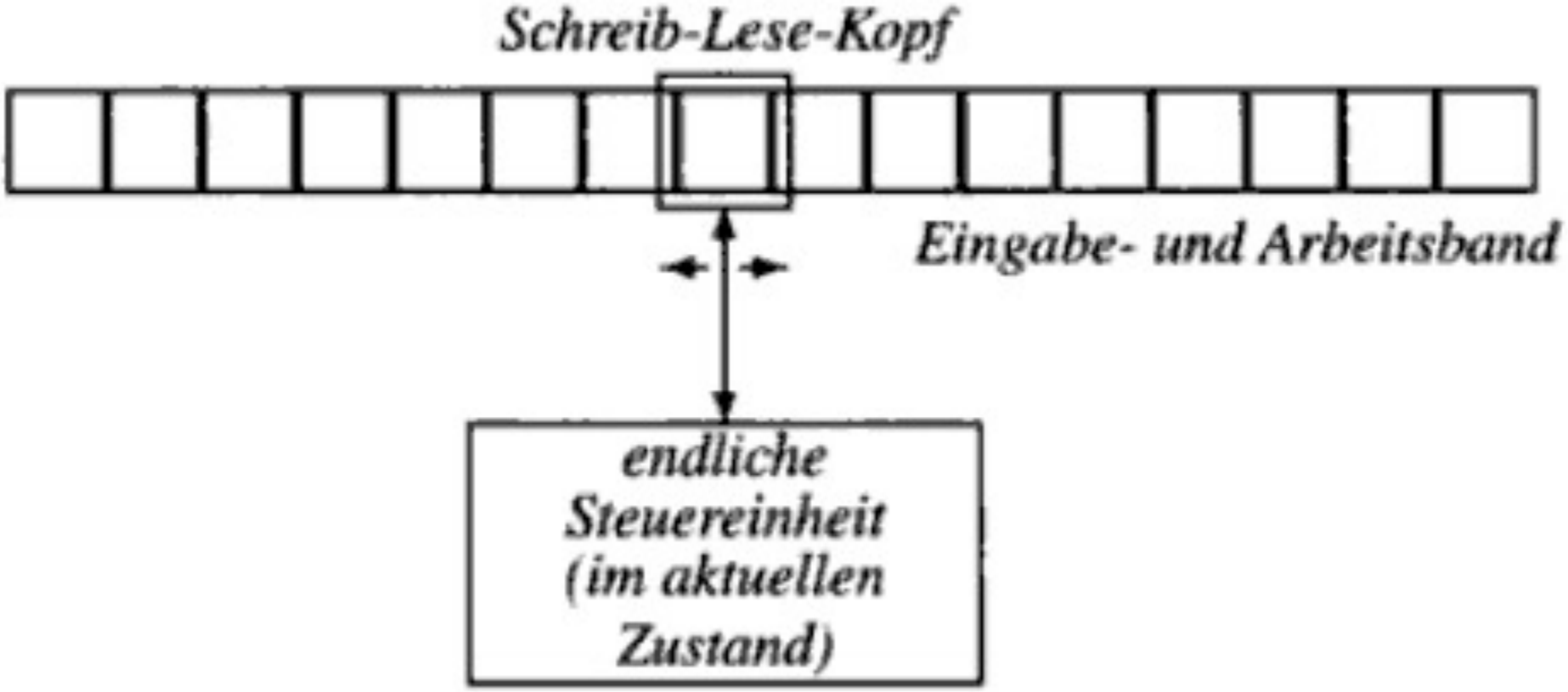


Abb.: Schöning, Uwe: Ideen der Informatik. München 2008, Oldenbourg Wissenschaftsverlag. S. 102.